PRÁCE Z DĚJIN TECHNIKY A PŘÍRODNÍCH VĚD

Praha 2004 Editor Jaroslav FOLTA Svazek 3

JAROSLAV FOLTA

DĚJINY MATEMATIKY I

PRÁCE Z DĚJIN TECHNIKY A PŘÍRODNÍCH VĚD

Praha 2004 Editor Jaroslav FOLTA Svazek 3

JAROSLAV FOLTA

DĚJINY MATEMATIKY I

SPOLEČNOST PRO DĚJINY VĚD A TECHNIKY
NÁRODNÍ TECHNICKÉ MUZEUM
PRAHA 2004

Jaroslav Folta

DĚJINY MATEMATIKY I

Práce z dějin techniky a přírodních věd
Svazek 3

Vydáno s podporou Výzkumného záměru ministerstva kultury
MK0000239901

Publikace připravena ve spolupráci
Výzkumného oddělení pro dějiny techniky a exaktních věd NTM
se Společností pro dějiny věd a techniky asociovanou k RVS ČR.

Editor řady Práce z dějin techniky a přírodních věd
Jaroslav Folta

© 2004 Jaroslav Folta
Národní technické muzeum Praha

ISBN 80–239–4031–7

Předmluva

Česká literatura postrádá vysokoškolský učební text věnovaný úvodu do studia dějin matematiky a hlavním rysům vývoje matematiky vůbec. K záměru napsat tuto knihu jsem byl veden mnohaletou zkušeností z přednášek pro pregraduální studenty, které jsem konal na Matematicko-fyzikální fakultě a na Pedagogické fakultě UK a zejména pak semináři s posluchači posledních let studia, z nichž mnozí připravovali diplomovou práci z dějin matematiky a bylo nezbytné jim neustále předkládat soubor hlavních prací převážně zahraničních autorů, upozorňovat je na knihovny a jejich fondy využitelné v jejich práci, na práci s archiváliemi, seznamovat je s referativními časopisy ap. a v neposlední řadě i na metodiku práce v historii vědy, která se přece jen trochu liší od běžné badatelské činnosti v exaktních vědách. Když jsem pak viděl i zájem o tuto problematiku u postgraduálních doktorandů z oboru, rozhodl jsem se připravit tuto učebhnici a hned v úvodu jí předřadit úvod do metodiky práce v dějinách matematiky spolu se stručným přehledem většinou v našich knihovnách dostupné zejména cizojazyčné literatury. V tomto směru může být učebnice užitečná i pro učitele mající zájem o vývoj svého oboru a pokoušející se o vlastní odbornou práci v něm.

Pro studenty pregraduálního studia je možné úvodní kapitoly zprvu přejít a vrátit se k nim jestliže zájem o tuto vědní disciplínu přejde z pasivní do aktivní oblasti. Běžný rozsah učebnice bohužel nutí k tomu, že její prvá část je věnována nejstaršímu vývoji matematiky. Další část by měla zahrnout renesanci matematiky v Evropě a počátek matematických výbojů předcházejících a naplňujících vědeckou revoluci 17. století a věřím, že se podaří dokončit i třetí část.

Praha 1997 05 15 *Jaroslav Folta*

Text, který máte před sebou, vznikal delší dobu, a mnohdy byla práce nad ním na několik let přerušována, protože autor byl zaměstnán velice časově náročnou prací, která nedovolovala navrátit se k tomu, co se mu stalo dlouholetou náplní činnosti. Poslední redakce byla provedena v říjnu 2004.

Jaroslav Folta

1. Vývoj matematiky

Na počátku si položme několik otázek, na které třeba ani nebudeme odpovídat. Jedna z prvých, která před historikem matematiky vyvstává, ale nikterak mu nebrání, aby ani při jejím nezodpovězení pokračoval ve své práci, je spíše filozofická:
Co vlastně považujeme za matematiku ?
a za ní následuje další:
Kam matematiku zařadit v systému věd?
a konečně i pro historika zvlášť důležitá otázka:
Je matematika ve své podstatě stále stejná, nebo se mění?
A mění-li se, pak co je příčinou těchto změn?
A jak je to pak s jejím postavením v systému věd v průběhu vývoje?

To vyvolává další otázku:
Co je podstatou matematiky? Lze vůbec o podstatě matematiky mluvit?
Existuje vždy v daném historickém okamžiku něco co by spojovalo veškerou matematickou činnost té doby, nebo alespoň její převážnou část?
Někdy se mluví o předmětu matematiky, který bývá spatřován především v charakteru objektů, které matematickými prostředky jsou matematici schopni zpracovávat.

René Descartes v *Rozpravě o metodě* k těmto otázkám v první třetině 17. století říká:

Srovnával jsem tajemství přírody se zákony matematiky. Byl jsem a jsem přesvědčen, že tentýž klíč otvírá dveře k pochopení jednoho i druhého. Když jsem vše pečlivě zvážil, došel jsem k názoru, že do matematiky patří všechny vědy, mající co dělat s poznáním řádu a míry bez ohledu na to, zda tuto míru hledají v číslech, obrazcích, konstelacích, zvucích či jiných objektech. Proto musí existovat universální věda, zkoumající vše, co se týká míry a řádu a úplně nezávislá na tom či onom použití. Tato věda je nanejvýš hodna označení „matematika“, neboť všechny ostatní vědy se k ní mají jako část k celku.

O třista let později se Albertu Einsteinovi připisuje výrok:

Matematika je produktem lidského mozku nezávislým na zkušenosti, ale přesto nádherně odpovídá reálnému světu a překrásně ho vysvětluje.

Známý americký historik matematiky Morris Kline ve své knize *Matematika ztráta určitosti* (1980) říká, snad proto, že se na celou problematiku dívá očima historika:

Hlavní příčinou rozvoje matematiky je její použití ke studiu přírody. Matematické pojmy i matematické metody poznání, jsou nejúčinnějším prostředkem výzkumu a vysvětlení nebeských těles, pohybu těles na Zemi a v její blízkosti, světelných, zvukových, tepelných a elektrických jevů, elektromagnetických vln, stavby hmoty, chemických reakcí, stavby oka, ucha i jiných orgánů lidského těla a mnoha set jiných důležitých jevů.

Při tom je bezesporné, že historie obecně (a historie matematiky rovněž) není rekonstrukcí minulosti, ale je spíše jistým pokusem o zobecnění a hledání příčinných vazeb a jejich důsledků — tedy vlastně opět jakousi filosofií dějin tohoto vědního oboru. V tomto směru by bylo možné do jisté míry polemizovat s výrokem J. W. Goetha, že *historie vědy je sama věda*. Ano, současný stav vědy je výsledkem cesty poznání v dané oblasti vědění, ale historie vědy není opakováním této cesty, je snahou o její pochopení, objasňování, vysvětlení. Neklade si jen otázku *jak to bylo*, ale také otázku *proč tomu tak bylo*.

Do zpracování historie vědy však historik vědy vkládá i mnoho nevysloveného, co ovlivňuje, aniž by si to uvědomoval, jeho názory a pramení z doby ve které žije, z jejích problémů a i z jejích řešení. Ne nadarmo se mnohdy v některých jazycích historie neklade mezi vědy (science), ale spíše mezi umění (arts). S tímto názorem není třeba souhlasit, ale je dobré o něm vědět. Bezesporu by nám měl hluboký historický pohled na dlouhý vývoj vědy pomoci překlenout tyto problémy a nakonec i umožnit objasnění některých otázek, které jsme si v úvodu položili.

Vytváření matematiky

Matematické poznatky, obdobně jako poznatky o přírodních jevech, získávalo lidstvo v průběhu svého vývoje a v neobyčejně složitém historicko-společenském procesu. O jeho počátcích prakticky nemáme žádné přímé doklady, ale bezesporu začínal s procesem polidšťování hominidů, s utvářením jejich společenské struktury, jejich dorozumívacích prostředků i nástrojů a způsobů získávání obživy.

Naše úvahy se v tomto směru opírají zejména o nepřímé analogie vytvářené z dostupných (i když ne příliš dokonalých) popisů o tom, jak se různé izolované kmeny donedávna ulpívající na primitivním stupni kulturního rozvoje, snažily zmocňovat kvantitativních vztahů a postupným zobecňováním využít (případně poznat) základní vlastnosti jednoduchých geometrických tvarů. Tento proces probíhal značně obdobně — a přitom prokazatelně nezávisle — na různých místech zeměkoule. Ukazuje tedy asi i způsoby jak se prvotní matematické pojmy a vztahy utvářely už v dávnověku.

Vedle pravidelně se opakující zkušenosti (empirie) se uplatňovalo především porovnávání (komparace), postupně provázené lidskou schopností abstrahovat od konkrétních jevů či kvantit a vytvářet jejich abstraktnější zobecnění, dospívat k vyjádření vlastností těchto zobecnění a pravidel pro operace s nimi. Protože matematika pracuje už jen s těmito zobecněními, pak můžeme souhlasit s Einsteinem, že matematika je produktem lidského mozku, avšak svými historickými kořeny vyrůstající ze zkušenosti a právě proto může opět nalézt uplatnění v problémech reálného světa.

Už od počátku se matematické poznatky vyvíjely jako prostředky poznávání některých vlastností jevů, tvarů, a vztahů existujících reálně v objektivním světě. Nezbytnost uvědomovat si existenci těchto jevů a potřeba poznávat jejich vlastnosti byla vyvolávána potřebami společenského života, potřebami poměřování velikostí, porovnávání množství, směny výrobků a pod. V tom byl hnací motor rozvoje poznávání přírody i rozvoje matematického poznání.

Porovnávání množství, představy o stejnosti počtu konkrétních předmětů nebo jejich vzájemných ekvivalentů, vytváření kvantit (hromad kaménků, zářezů na holi, vázání uzlů a pod.), s nimiž bylo možno srovnávat vše, zkušenosti s přidáváním a ubíráním, zbytky a přebytky konkrétních srovnávaných počtů, přispívaly v dalším stádiu abstrakce k vytvoření abstraktního pojmu čísla a operací s ním.

Podobný proces vytváření matematických pojmů a poznatků se v matematice udržuje stále, i když objekty, jež jsou předmětem úvah, ztratily svou *příliš* konkrétní nebo *zdánlivě* názornou podobu a nabyly třeba tvaru abstraktních matematických struktur. Matematici o tom nehovoří ani o tom nepíší, ale abstraktní struktury, s kterými pracují, pro ně nabývají opět charakteru velmi konkrétních pojmů, jejichž vlastnosti velmi dobře poznali a zvládli způsoby jak s nimi operovat. Je však nesporným faktem, že o realitu se opírající základ vytváření matematických poznatků a neustálá vazba matematiky na problémy poznávání mnohotvárných projevů nás obklopujícího světa, jsou důležitou regulací umožňující účinnou aplikaci matematiky v ostatních oblastech lidského poznání a společenského života. A to vše trvá přes stále se zesilující abstraktní charakter matematiky, to je základem rostoucí matematizace dalších oblastí poznání, pro něž se matematika stává jednou z metod zkoumání reality.

Sledování historického procesu matematické tvorby, pojmů, metod i možností aplikace matematiky nás přesvědčuje, že matematické poznatky jsou stále ve vývoji. Jde o objektivní proces, který probíhá ve vazbě na řadu dalších jevů, procesů a souvislostí, které utvářejí určité etapy ve vývoji této vědní oblasti. Nalézat a analyzovat všechny podstatné souvislosti určující příslušnou vývojovou etapu matematiky je jedním z důležitých úkolů dějin matematiky.

Problém periodizace vývoje matematiky

Hledání etap vývoje matematiky má samo o sobě rovněž svoji historii. Dlouhou dobu se historiografie matematiky přidržovala rozčlenění výkladu dějin matematiky podle *území a doby*. Mluvilo se postupně o matematice egyptské, babylonské, čínské, indické, řecké a helenistické nebo antické, arabské, evropské. Toto teritoriálně chronologické členění zdůrazňovalo vždy to období, kdy příslušná oblast nejvíce přispěla k rozvoji matematického poznání. Setkáváme se s tím dodnes např. v dvousvazkové knize H. Gericke, *Mathematik in Antike und Orient* (1984), *Mathematik im Abendland von den römischen Feldmessern bis zu Descartes* (1990). (Přitom každý pociťuje, že i v termínech např. egyptská matematika a matematika v Egyptě je rozdíl); přitom se nekladla otázka, zda lze nalézt nějakou příbuznost mezi takto vymezenými „matematikami“, zda lze porovnávat popisované etapy matematického vývoje hlouběji a nalézat v nich jistý obdobný rámec (obdobný předmět, metodu či pod.). Zřejmě to souvisí do značné míry s převážně popisnou metodou příslušné části historiografie matematiky, která se snažila především *popsat* a *poznat co bylo*.

Další pokusy o periodizaci vývoje matematiky probíhaly buď na základě *stupňů abstrakce* v matematice, nebo jednalo-li se o lokální (omezeně teritoriální) vývoj tak byl sledován *vývoj institucí*, které v daném územním celku zajišťovaly rozvoj matematiky; za základ byl bráván i *postup diferenciace* v matematických vědách. Setkáme se také s tím, že za základ periodizace jsou brány vnější faktory — jako třeba společenské formace — a jimi dané mezníky společenského vývoje (např. Wussing, *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*, Berlin 1979).

Zcela nové hledisko rozčlenění látky uplatňuje ve své knize Ivor Gratan Guinnes (*Rainbow of mathematics* – New York 1997). Zde se snaží spojit historickou (časovou) osu vývoje s hlavními obsahovými trendy v daných obdobích.

Mohlo by se stát, že vzhledem k někdejšímu politickému vývoji v naší zemi se odvrhne kritérium změny předmětu matematiky jen proto, že se zde používalo pro jeho zdůvodnění citátů z Engelsova *Anti-Dühringa*. Nicméně myšlenka sledování změn předmětu matematiky, za který se považují prostorové tvary a kvantitativní vztahy, se objevila už u italského matematika Salvatore Pincherle (1853–1936) a dostala pregnantní vyjádření u A. A. Kolmogorova, který rozdělil vývoj matematiky na *tři hlavní období* a to mezníky položenými do počátku 17. a počátku 19. století: Za první etapu bylo považováno období převážně matematiky konstantních veličin a neměnných geometrických tvarů; na to navazovalo období matematiky proměnných veličin a geometrických transformací; a od 19. století se rozvíjí podle Kolmogorova období matematiky „možných“ kvantitativních a geometrických vztahů. Dalo by se říci, že toto pojetí vystihlo velmi dobře některé podstatné změny ve vývoji matematiky, dávalo charakteristiku převažující podstaty jejího charakteru v dané etapě a snažilo se proniknout hlouběji do podstaty procesu vývoje matematiky.

Postupně se však ukazovalo, že Kolmogorovova periodizace, přestože správně vystihuje podstatnou stránku vývoje matematiky, trpí určitou jednostranností. Především se zaměřuje na periodizaci matematiky jako vědy v tom smyslu, jakého pojem vědy dosáhl teprve v antickém Řecku. Tím vlastně vylučuje ze svých úvah ono důležité období formování základních abstraktních pojmů matematiky, které trvalo až do 5. století před n. l. a zahrnuje výsledky vypracované ve starověkém Egyptě, Mezopotámii a v dalších oblastech „říčních kultur“. Rovněž se ukazuje, že nelze pouhou změnou předmětu vystihnout odlišnosti, které jsou patrné v onom dlouhém období mezi 5. st. před n. l. a 17. st. n. l., kdy se rozvíjejí například dva tak od sebe odlišné přístupy k matematickým objektům, jaké vykazuje řecká helenistická věda a na ní navazující tendence na jedné straně a věda v zemích pod ideologií islámu na straně druhé.

Naznačené problémy do určité míry řeší *přijetí dalšího podstatného kritéria*, které určuje charakter matematiky a to *forem a metod*, jakými matematika dosahuje svých výsledků a jakými je zdůvodňuje. Vytváření metod matematického bádání a posléze třeba i jednostranná preference některé z nich, zdánlivě nejvýhodnější (ať už z praktického nebo teoretického hlediska), také podstatně mění charakter matematiky.

Logická deduktivní metoda výkladu antické matematiky odlišuje další vývoj matematiky od počtářskoempirických postupů předešlého období. Geometrická algebra, která překlenula koncepční krizi pythagorejské matematiky (způsobenou objevem iracionalit), musela být negována diofantovskou algebrou a zejména algebrou islámských matematiků, kteří odvrhli pouta nasazená algebře (absolutně pojatou) svazující geometrickou názorností.

Vycházíme-li tedy při periodizaci matematiky jen ze změny předmětu matematiky, přehlížíme další určující souvislosti jejího vývoje, které navíc jsou vnitřními problémy samotné matematiky. Stejně tak i pomíjení vývoje metod matematiky (představa, že v celých dějinách matematického bádání se uplatňuje jediná *matematická* metoda) vyplývá z chybného přenášení dnešní výkladové metody (zdaleka ne heuristické či badatelské) do minulosti a svědčí o nedostatečné znalosti vývoje matematiky.

Jsou zde ovšem i další vazby, které pomáhají spoluvytvářet charakter matematiky daného období a které je třeba vzít v úvahu při záměru periodizovat její vývoj. Matematika vznikala jako jeden z nástrojů poznávání reálného světa a sama se stala metodou (nástrojem) přírodovědeckého poznání a jeho výkladu. Galilei říká: *Filosofie je napsána v té velké knize, která je stále* *otevřená před našima očima. Myslím jí vesmír. Tuto knihu však nepřečteme dokud nepoznáme její řeč a abecedu. Byla napsána matematikou.*

Tato historicky se prohlubující vazba se neprojevuje ve změně předmětu matematiky a málokdy (a rozhodně ne okamžitě) je doprovázena změnou metody matematického zkoumání. A přitom růst tohoto prolínání — souhrnně nazývaného matematizací — přispívá k obohacování obou oblastí: přírodovědných disciplín, jejich metodiky, vymezování a zpřesňování pojmů i dosahu výsledků, i k rozšiřování matematikou zkoumaných struktur.

Do zdánlivě uzavřené čisté matematiky tak vstupuje důležitý *impuls široce chápané společenské praxe*, jejích požadavků na matematiku, ale současně i touto praxí připravené podmínky pro rozvoj matematiky. Společenské struktury, které si uvědomují užitečnost matematiky pro své vlastní zájmy, pomáhají spoluvytvářet předpoklady pro její další rozvoj, což se projevuje v systému vzdělávání, v zajištění badatelských a pedagogických institucí, zaopatřování a vydávání matematických periodik a dalších tisků a v celé škále dalších faktorů, mezi nimiž nechybí ani popularizace matematiky.

Ještě jeden moment je třeba připomenout na tomto místě. Na jedné straně od 19. století se matematika stále silněji snaží o vlastní formalizaci a odtud pro ni vyrůstají vnitřní badatelské problémy, o jejichž aplikabilitě se nemusí ještě dnes nic vědět, na druhé straně se objevují stále více společenské problémy neřešitelné jednotlivci, ale vyžadující širokou mezioborovou spolupráci. Mezi ně patří i globální problémy řešené týmy odborníků z různých oblastí vědy, které potřebují využít pomoci matematiků, aplikaci určitých matematických metod, ev. vytvoření nových matematických prostředků k svému vyřešení. Takže se dá říci, že matematika stále silněji dostává popudy ke svému rozvoji ze dvou zdánlivě oddělených pramenů. Jestliže Morris Kline soudí, že *v současnosti neexistuje jedna, ale mnoho matematik a každá z nich z mnoha důvodů neuspokojuje matematiky patřící k jiným školám*, pak zdá se, jde především o problematiku přístupu k vnitřnímu vývoji matematiky a ke koncepci jejích základů, kde se od konce 19. století stále intenzivněji zpřesňovala výchozí kritéria.

Nicméně je třeba se dívat na matematiku jako na společenský jev rozvíjený společností koneckonců pro potřeby společnosti, bez ohledu na postoje, přání a obzory jednotlivého matematika, který může být ovlivněn jen svou osobní zkušeností a prameny a způsoby vlastního dalšího vzdělávání.

Hlavní období ve vývoji matematiky

Kolmogorovova periodizace dala spolu s dalšími kriterii základ dnes přijímanému dělení vývoje matematiky do určitých období, přičemž i toto dělení je třeba chápat s jistou mírou volnosti.

Především mezníky této periodizace nejsou okamžiky, časové zlomy, ale mnohdy i delší období, v nichž se vytváří nový charakter matematiky, nebo narůstají pro další rozvoj určující nové proudy v matematice.

Dále je třeba vidět, že se matematika rozvíjí nerovnoměrně v různých oblastech světa, a že je to podmíněno stavem možností kulturního, sociálního a ekonomického rozvoje daného regionu. To je — dalo by se říci — pohled globální, určující celkové milieu matematiky, nevylučuje však nikterak, aby se v dané oblasti přes celkově nepříznivé podmínky neobjevil vynikající jednotlivec, jehož osobní podmínky mohou být buď zcela výjimečné, nebo jehož intelektu postačují velice malé podněty k tomu, aby nakonec přispěl velkou měrou dalšímu vývoji matematiky.

Nelze však nikterak popřít, že vývoj matematiky v jedné zemi či regionu je bezesporu určován hlavními, objektivními, celosvětovými proudy matematiky, je však celkově silně modifikován místními společenskými podmínkami dané oblasti.

Toto vše je třeba mít na paměti, jestliže se pokoušíme stanovit hlavní epochy vývoje matematiky:

1. Období tvorby elementárních matematických pojmů
   (Od prehistorické doby do 6. st. před n. l.)
2. Období matematiky konstantních veličin
   a. Období vytváření deduktivní matematiky
      (Řecko od 6. st. před n. l. do 4. st. n. l.)
   b. Období elementární matematiky ve středověku
      (završené v Evropě na konci 16. st.)
3. Období matematiky proměnných veličin
   (od 17. st. po zač.19. st.)

4. Období matematiky zobecněných kvantitativních a prostorových vztahů
   (Od 1. pol. 19. st. do současnosti)
   Pro tuto poslední etapu se uvažuje, zda 2. pol. 20. století už nevytváří opět další období, které se sice nevymyká dostatečně široké charakteristice 4. období pokud jde o předmět matematiky, ale v metodách je už značně ovlivněno kybernetikou, informatikou, teorií her a pod.

Prvé období zahrnuje kromě dlouhé prehistorie, o níž máme nepatrné doklady, především období egyptského a mezopotámského starověku. Nejstarší dochované matematické texty z počátku 2. tisíciletí před n. l. ukazují už značně vysokou úroveň matematických znalostí té doby. Pojmy číslo, geometrický útvar, primitivní numerace, číselné posloupnosti, elementární metody výpočtů měr útvarů, konstrukční postupy vytváření některých geometrických útvarů, záznam číslic, ale i řešení poměrně komplikovaných úloh úrokování, sčítání řad, dělení majetku byly ve své konkrétní podobě předmětem práce matematiků. Dochovaná terminologie naznačuje růst geometrických pojmů z problémů znovuvyměřování pozemků po záplavách. Rozdělování potravin vedlo k aritmetickým úlohám. Rozsah matematických znalostí si v té době vynucoval roztřiďování úloh podle určitých metod řešení a pak předávání poznatků ve školách.

Druhé období je děleno na dvě odlišující se epochy. **Prvá** z nich je nejvýrazněji charakterizována vytvořením matematiky jako *deduktivně budované teorie*, jejíž jednotlivé výsledky byly vyvozovány z řetězce předešlých výsledků; v níž byl vytvořen určitý systém základních vztahů (axiomů) a požadavků (postulátů), o který se celá stavba teorie opírala. Tato etapa zahrnuje především období antického Řecka (dílo pythagorejců, Thaleta, Eudoxa, Eukleida, ale i Archimeda, Apollonia a Diofanta), kdy se plně uplatňovala a využívala tzv. geometrická algebra. Objevily se i některé matematické myšlenky, k jejichž plnému uplatnění nemohlo v té době dojít, ale které se udržely, prokázaly svou plodnost až v mnohem pozdější době (např. infinitesimální úvahy Eudoxa a Archimeda, nebo Apolloniovo analytické zkoumání kuželoseček stojící na pokraji myšlenky souřadnic i funkčního vztahu). Ekonomický, kulturní, technický a především filozofický rozvoj řecké společnosti podnítil dosažení této úrovně matematického myšlení; rozklad této společnosti pak znemožnil souvislé pokračování.

Druhá etapa matematiky konstantních veličin byla zaměřena k rozpracování elementární matematiky. Oživila počtářský charakter matematiky, z Orientu čerpala tzv. indickoarabský poziční číselný záznam a hlavní aritmetické algoritmy. Díky vlivu Diofantovy *Arithmetiky* byla v zemích pod arabským vlivem rozpracovávána algebra jako nauka o řešení rovnic, docházelo zde ke kritice některých partií Eukleidových *Základů*, i k pokusům o syntézu antických geometrických *proporcí* s aritmeticko-algebraickými kvadratickými iracionalitami. Živé pěstování této problematiky od 6. st. ve zmíněných zemích, pomohlo předat orientální i antické tradice do — do té doby vědecky značně sterilní — západní Evropy. Od 11. až po 15. století se Evropa seznamovala s výsledky jak antických matematiků, tak i arabských komentářů a rozpracování. Na konci této etapy se evropským matematikům podařilo dospět k samostatným výsledkům v oblastech souvisejících právě s výpočtářskou praxí (trigonometrické výpočty a tabulky nezbytné pro rozvoj astronomie, tabelování logaritmů, řešení rovnic 3. a 4. stupně a pod.)

Třetí období zahrnuje matematiku, která se uplatňuje při zkoumání proměn. V tomto období se jí podařilo kvantifikovat fyzikou zprostředkovaný problém pohybu. V analytické geometrii (Descartes, Fermat) nalezla prostředek, jak rovnicí popsat dráhu pohybujícího se bodu. V diferenciálním a integrálním počtu (Newton, Leibniz), pak dospěla k rozlišování kvality pohybu bodu po dráze. Tak začala problematika mechaniky prorůstat některými oblastmi matematiky a matematika dala prostředky k vytvoření analytické mechaniky a jejích neobyčejných aplikací. Do tohoto období spadá celá epocha klasické analýzy (Bernoulliové, Euler, Wolff, l'Hospital, Laplace, Lagrange, Clairaut, d'Alembert a j.), ale také počátky teorie pravděpodobnosti i snah o konstrukci prvých kalkulátorů.

Čtvrté období vývoje matematiky se začalo prosazovat v první polovině 19. st., kdy se začal měnit vztah matematiky a jejích aplikací. Matematika nahromadila už tolik poznatků, že většinu problémů, které jí byly předkládány, mohla řešit známými metodami. Nahromadění výsledků, ověřených hlavně *uplatněním* *v aplikacích*, si vynutilo pro další vývoj novou abstrakci předmětu matematiky. Matematika přešla na vyšší stupeň abstrakce, aby mohla hlouběji proniknout do problematiky reálného světa. Vzdálila se od jednotlivostí, aby lépe porozuměla jejich zákonitostem. Matematika se přestala soustřeďovat na zodpovídání podnětů z jiných oblastí a začala se obracet více ke svým vlastním problémům, vytvářet svébytné, logicky správné matematické konstrukce (teorie), které nebyly matematickým modelem žádné známé situace v reálném materiálním světě. Kolmogorov mluví v tomto ohledu o *zobecněných kvantitativních vztazích a prostorových formách možných* ve smyslu možnosti jejich reálného uplatnění během dalšího vývoje věd a společenských potřeb. Příkladem takových teorií jsou neeukleidovské geometrie (Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Riemann), jakožto teorie, které dlouho nenacházely svou aplikaci. Teprve relativistická fyzika mohla využít hotové a matematicky správné teorie neeukleidovských geometrií.

Stejně jako neeukleidovské geometrie vznikly ze snahy o vyřešení otázek kolem základů geometrie a zahájily proces zobecňování předmětu geometrie, zrodilo se ve stejné době z problematiky řešení rovnic (stupně vyššího než čtvrtého) zobecněné chápání algebry jako teorie algebraických struktur (teorie grup, těles a pod.) v díle Galoise a Abela. Rovněž i zpřesňování základů matematické analýzy, počínající u Bolzana a Cauchyho, přineslo první kroky k budování abstraktnější teorie funkcí, jakožto nezbytného východiska pro pozdější požadavky funkcionální analýzy, topologie apod. Specializace, která v matematice té doby provázela snahu o zpřesňování základů, vedla ke vzniku řady relativně samostatných dílčích matematických teorií.

V poslední třetině 19. st. byla tato tendence doplňována snahou po hledání sjednocujících principů, které by postavily na společný základ tyto speciální, ale oddělené výsledky, resp. hledání jednotícího metodického východiska, o které by se jednotlivé matematické teorie mohly opírat. Tak se vytvářely abstraktní geometrie; v Kleinově koncepci se teorie grup využila ke klasifikaci do té doby disparátních geometrií; teorie množin, podněty jejíhož vzniku byly různé, se postupně stávala východiskem a základní teorií pro celou řadu matematických disciplín a pod.

Přesunulo se i těžiště zájmu o matematické oblasti. Na důležitosti nabyly matematická logika, topologie, teorie diferenciálních rovnic; vytvořila se teorie integrálních rovnic; teorie pravděpodobnosti a matematická statistika vyrostly z problematiky zpracování hromadných dat, statistických šetření a měření a ovlivnily rozvoj této oblasti. Zde našla posléze ve 20. století své kořeny nejen teorie strategických her, ale i studium optimalizace, matematická informatika a další obory, které jakoby předznamenávaly už další etapu vývoje matematiky, na jejímž okraji se pravděpodobně nacházíme.

2. Stručný úvod do metodiky odborné práce v dějinách matematiky

Je to snad jen zvláštností naší vědecké obce, že problematika historie vědy, do níž bezesporu dějiny matematiky spadají, je zcela na okraji jejího zájmu, zatímco v ostatní Evropě dochází k jejímu intenzivnímu badatelskému rozvoji, který se projevuje navenek zvětšováním počtu vydávaných titulů monografií, počtu nově zakládaných časopisů, i počtu sympozií a konferencí a koneckonců i růstem účastníků pravidelných mezinárodních kongresů v této oblasti.

Můžeme však konstatovat, že historie matematiky, která v naší zemi byla dlouho jen jedním z vedlejších zájmů několika našich matematiků, dostala na počátku 60. let a poté v polovině 80. let 20. století významné impulzy, které v poslední době začínají nést své výsledky. Ovšem stále slabá rozpracovanost problematiky dějin matematiky u nás dává příležitost pro širší i hlubší odbornou a vědeckou práci v oboru (bez nároku na stálou přítomnost v některém z hlavních vědeckých center státu) za předpokladu dobré orientace ve výsledcích světové literatury z dějin a filozofie matematiky a znalosti trendů vývoje problematiky. Hlad matematicko-fyzikálních periodik po článcích z těchto oblastí může na druhé straně vést i k produkci a publikaci statí s nízkou odbornou úrovní, kompilativních článků z neseriózní literatury, přinášejících nepodložená fakta či nesprávné úvahy, což se může oprávněně projevit v odporu širší matematické veřejnosti vůči takovým článkům, ale neprávem to může působit i na celkové snižování významu a úrovně vědeckosti historiografie matematiky v očích matematické obce, tím spíše, že metodická práce (způsob prokazování závěrů i dokumentace argumentů) se v tomto oboru značně liší od metodiky ostatních čistě matematických disciplín. Společenskovědní charakter dějin matematiky dává disciplíně svoji metodiku a i když se musí opírat o znalost matematiky, převažuje tato „historická“ metodika nad formálně-logickým charakterem konečných výsledků a teorií ostatních matematických oblastí (i když i zde v prvotní fázi badatelského procesu se heuristicky uplatňuje mnohem komplikovanější proces, jehož probádání stále ještě čeká na psychology, sociology a filozofy vědy). Přitom se zdá neúčelné dějiny matematiky vyřazovat z matematiky (i když nelze popřít, že patří též do historie a filozofie) už proto, že z matematiky vyrůstají, dávají nám poznat její podstatu, vývojové trendy a společenské zařazení a tím pomáhají spoluvytvářet další vývoj matematiky v širším slova smyslu.

To jsou důvody, proč je třeba, aby i práce v oblasti historie matematiky nabyla u nás vědecké akribie adekvátní úrovni této oblasti v předních střediscích světové vědy, aby erudovanost našich badatelů v těchto oblastech dovolovala nejen plnit úlohy, které před ně klade okamžitá potřeba naší matematickofyzikální publicistiky (která do značné míry dychtí jen po určité problematice — „syntetického“ nebo „jubilejního“ charakteru a analytické studie nechává na okraji zájmu), případně nároky na udržování úrovně národní vzdělanosti v oboru, ale také umožňovala zapojovat se do celosvětových vědecko-výzkumných tendencí v těchto oborech, případně i v těchto směrech pomáhala spoluprosazovat progresivní trendy. I v tomto směru vedle sečtělosti a specializace je nezbytná schopnost orientace v současné (ale i starší) literatuře nejen z dějin a filozofie matematiky, ale z dějin vědy vůbec.

Snad jen několik úvodních poznámek přiblíží možnosti v tomto oboru. Ostatně metodika, o níž bude v následujícím řeč, může být s úspěchem využita i v jiné odborné činnosti v matematice.

Volba problematiky

Již jsme naznačili, že při vhodné volbě problematiky je možné v dějinách matematiky dospět poměrně brzy k původním výsledkům, které budou obohacením našich znalostí vývoje matematiky a tím také budou zasluhovat své publikování. V tomto směru je pochopitelně nezbytné vedení začínajícího pracovníka. Jsou ale některé skutečnosti, kterými se lze řídit téměř všeobecně. Především lze říci, že 19. a 20. století patří mezi ta období, v nichž lze najít historicky závažnou matematickou problematiku dosud nezpracovanou historiografií matematiky a k tomu nosnou: Je to však problematika náročná na matematické znalosti, mnohdy ale ani na vysokých školách nepřednášené. Naproti tomu tolik lákající antická matematika nejen že předpokládá jazykové znalosti, ale především seznámení s neobyčejně hojnou literaturou. Zde se nelze opírat pouze o přehledné syntetické práce, které z nejrůznějších důvodů nemohou postihnout celou problematiku a tak tvoří vlastně jen úvod studia. Proniknutí k podstatě problematiky vyžaduje dlouhodobě další detailní analytické studium.

Někdy jsme při volbě problematiky ovlivněni vnějšími faktory (výročím instituce, osobnosti), ale v zásadě by volbu problematiky měly ovlivňovat:
(1) předpoklady pracovníka,
(2) rozvaha nad závažností zvolené problematiky.

Všímáme-li si předpokladů pracovníka pro hlubší práci v dějinách matematiky, neměli bychom v případě vysokoškolského studenta rozhodně opomíjet, že by adept měl být studentem schopným chápat a řešit běžné problémy přicházející ve výuce, který má současně širší kulturní a společenské zájmy, v jehož projevu a vystoupeních se ukazuje, že je vnitřně puzen k přemýšlení o vztahu matematiky k jiným vědním oblastem, ke společnosti, k jejímu uplatnění a jeho efektu. Měl by to být student, který je v nejrůznějších oblastech schopen syntetického pohledu či nadhledu a vedle matematických zájmů má zájem o historii či filozofii vůbec. Ze zkušenosti víme, že takoví studenti existují, ale pochopitelně jich není mnoho. Vedle schopnosti orientace v dané problematice by měl adept prokázat i schopnost analytického rozboru, kritického přejímání faktů a soudů z různých pramenů, komparace různých jevů a postupného vypěstování schopnosti formulování závěrů zobecňujících studiem dosažené výsledky.

Volba problematiky by se vždy měla přimykat k té širší oblasti, jež je blízká zájmům pracovníka a měla by postupným studiem vést od orientace v široké oblasti četbou přehledných knih, přes referování výsledků hlubšího studia už speciální (časopisecké) literatury, až po pokusy o samostatné zvládnutí určitého problému ve vývoji daného směru třeba formou diplomové práce. Tím by bylo možno přivést studenta až na pokraj samostatné badatelské práce v oboru.

Pro práci v dějinách a filozofii matematiky je značným předpokladem nezbytná alespoň pasivní znalost více světových jazyků. Je to dáno nejen tím, že česká a slovenská literatura z oboru je velice kusá, ale stejně jako v každé jiné vědní oblasti tím, že progres oboru probíhá celosvětově a nejnovější výsledky jsou publikovány v cizích jazycích a referovány ve světových řečech (angličtina, ruština, francouzština, němčina). Nadto práce z historie či filozofie matematiky jsou „literárnější“ než práce matematické, z čehož vyplývá i jejich větší náročnost na jazykové znalosti. Zároveň je nutno uvážit, že zvládnutí dalšího jazyka do určité míry ovlivňuje i volbu tématu. Nelze třeba dobře studovat práce německých matematiků, když pro badatele dostupným jazykem je pouze angličtina. Nelze podceňovat ani ruštinu, protože literatura z dějin matematiky v této řeči je bohatá a také bohatě zastoupená v našich knihovnách.

Rozvaha nad závažností zvolené problematiky pak u začátečníků závisí i na vedoucím pracovníkovi, který po zvážení předpokladů adepta díky vlastním zájmům v oblasti, díky vlastnímu literárnímu rozhledu, začne orientovat odborné studium začínajícího badatele. Vedoucí práce do značné míry nejen zaměřuje budoucího absolventa do oblasti jeho případné budoucí intenzivnější odborné a vědecké činnosti (což klade nároky na jeho nadhled na obor), ale ukazuje mu, jak hledat otázky, jak se pokoušet na ně hledat odpovědi, jak prokazovat platnost odpovědí atd. — tedy uvádí ho i do metodiky vědecké a odborné práce v dějinách matematiky, která je svým způsobem odlišná od odborné práce v matematice.

Jestliže má třeba seminární a posléze diplomová práce vytvářet předpoklady další soustavné práce v dějinách či filozofii matematiky tak, aby mohla být součástí postgraduálního semináře, její výsledky mohly vyústit do doktorské disertace a posléze k jejich publikování a případně v samostatnou badatelskou orientaci, pak je třeba těmto cílům podrobit i konkrétní volbu širší problematiky. Proto by témata měla vycházet z té oblasti, která je málo zpracována, která vyžaduje ještě hodně analytické práce, ale přitom již existují některé práce, které mohou začínajícímu adeptu přiblížit alespoň některé stránky problému. Např. konkrétně řečeno:

Nevolíme problematiku z antiky.

Literaturou k této oblasti se i odborník obtížně probírá, protože je jí velice mnoho a každý další seriózní pokus by vyžadoval studium originálních klasických textů v jazycích většině studentů nedostupných (i když i zde mohou být čestné výjimky, kdy student během studia matematiky zvládne i arabštinu nebo řečtinu, latinu či dokonce egyptské hieroglyfy). Poznamenejme, že problematice výzkumu vědy v klasických jazycích je věnováno postgraduální studium na Graduierten Kollege University v Hamburku.

Nevolíme ani biografie.

Tam začátečník může jen kompilovat literaturu. Archivní studium (pokud nejde o domácí matematiky) nepřipadá v úvahu a nadto je časově náročné. Biografická studie, pokud nesbírá jen životopisná data, by měla ukázat na šíři odborné a vědecké práce daného matematika, na její vazby se světovou matematikou atd., a to převyšuje ambice začátečníka.

Nevolíme ani příliš přehledná témata.

Pro začátečníka obvykle znamenají předčasný syntetický pohled nepodložený analytickým rozborem. Tím vedou k povrchnosti, k mylnému přesvědčení, že výsledku v dějinách matematiky lze dosahovat snadno.

Tím není řečno, že podobná témata nejsou vhodná pro seminární referáty — jako prvé přibližování k oboru.

Z uvedeného negativního výčtu vyplývá, že racionálně volená témata by měla být vybírána z těch oblastí matematiky, jejichž vývojové tendence je třeba ještě analyticky prozkoumat a kde analytický rozbor přináší nové výsledky pro celkové zhodnocení období — a tím je především dána volba **19. a 20. století**. Zde je vhodné dát posluchači uzké téma, u kterého lze studiem literatury dojít k poznání jeho funkce ve vývoji matematiky. Téma by přitom mělo mít možnost zužování podle vlastních schopností, možností i zájmů posluchače (stejně jako podle náročnosti, obtížnosti a pracnosti problematiky), ale současně by mělo zahrnovat i vedlejší otázky, které by umožnily jistý odklon od původní problematiky, pokud by se ukázala jako nezvládnutelná či málo perspektivní. To však vyplyne až z prvních kroků práce.

Vhodná témata

jsou ta, kde je celková tendence v oblasti jasná z dostupné literatury a posluchač má u některých prací z daného období studiem prověřit, zda spadají do schématu vytvořeného literaturou, či zda tomuto schématu odporují. Obdobně je možno zkoumat vliv díla předchůdců na práci významného izolovaného vědce. To znamená najít, prostudovat a porovnat práce, které měl (mohl mít) v ruce a porovnat je s jeho výsledky. Zde pak přistupuje i vliv učebnic, kompendií, ale i statí předchůdců i současníků atd. Taková témata pak mohou vést i k překvapivým objevům ideových proudů ve vývoji určitého problému.

U volby témat diplomových prací z dějin matematiky se mohou projevit i vnější faktory vyplývající ze zájmu fakulty o historické zpracování určité oblasti, jako jsou například:

– podklady k dějinám katedry či školy
– podklady k biografii některého z dřívějších členů katedry
– podklady pro historická témata vztahující se k některé perspektivně připravované akci apod.

Specifika vedení práce

Začněme nejčastějšími chybami. Patří k nim nepoučenost o existujících pomůckách pro práci v dějinách matematiky a dále pak zadání originálních matematických textů k analýze bez předchozí rešerše v dostupné literatuře. Začínajícímu badateli (i posluchači) je nezbytné podat návod jak odborně pracovat v tématice z dějin matematiky, neboť s podobnou prací se obvykle posluchač setkává u diplomové či seminární práce zpravidla poprvé. Co je tedy potřeba?

Nezbytná orientace v tématu

To znamená jakou literaturu je třeba nejprve vyhledat, když začínající pracovník hledá prvé poučení. Vedoucí práce pak z vlastní zkušenosti upozorní na to, co lze v daném typu literatury najít a jak lze této literatury využít.

Všeobecné encyklopedie

Velká sovětská encyklopedie, Encyklopaedia Britannica, Larousse, Brockhaus, Bartelsmann aj. Z našich: *Ottův slovník naučný, Slovník naučný Riegerův, Masarykův slovník naučný, Malá čs. encyklopedie, Ilustrovaný encyklopedický slovník* aj.

Je třeba upozornit na to, co se zde dá všechno najít (věcná i biografická hesla, z které doby, zda se tam dá najít i další literatura a v čem jsou slabiny dané encyklopedie).

Speciální matematické slovníky

Včetně starých (Klügel) i nejnovějších (*Mathematisches Wörterbuch* nebo Alexandrova: *Matematičeskije terminy*.

Staré matematické encyklopedie

Například *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* vydávaná pod vedením F. Kleina na počátku 20. století (též v rozšířeném a přepracovaném francouzském překladu) nebo Ernst Pascal: *Repetitorium der höheren Mathematik*.

Speciální biografické slovníky

Poggendorfův lexikon (*Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*), vycházející dodnes od 60. let 19. století, obsahuje hlavně životopisná data (na pokračování třeba i v dalších svazcích) spolu se zestručněnou citací hlavních prací především matematiků a fyziků.

Dictionary of Scientific Biography (Sv. 1–17, Scribner, New York 1970–1980). Obsahuje velmi obsáhlé vědecké biografie velkého výběru vědců spolu s bibliografií jejich hlavních děl a děl o nich.

Wussing – Arnold: *Biographien bedeutenden Mathematiker* (1975) přináší údaje o životě a vědeckém významu jednotlivých matematiků zařazených podle etap, v nichž pracovali. Jen nepatrně je uváděna další literatura.

S. Gottwald, H.-J. Ilgands, K.-H. Schlote: *Lexikon bedeutender Mathematiker*

Biographical Encyclopedia of Scientists I + II, Bristol (1994)

A. N. Bogoljubov: *Matěmatiki i mechaniki* (1983) je seriosní slovník s charakteristikou hlavní činnosti jednotlivých osob a s daty jejich zaměstnání.

J. Bober: *Malá encyklopédia vynálezcov a bádatelov* (1983); velmi stručné, ale místy nepřesné údaje bez dalších literárních odkazů.

J. Tibenský: *Priekopníci vedy a techniky na Slovensku I, II* (1986) uvádí obsáhlejší životopisy vědců působících nebo pocházejících ze Slovenska nebo se Slovenskem zabývajících. V závěru uvádí i bibliografii prací, z nichž bylo čerpáno (a uvádí i odkazy na tuto literaturu v textu).

Chronologické přehledy

Müller: *Zeittafel zur Geschichte der Mathematik*

Folta, Nový: *Dějiny přírodních věd v datech*

Schlote: *Chronologie der Naturwissenschaften*, Fankfurt 2002

Speciální bibliografické přehledy k dějinám vědy, příp. pouze matematiky

Cumulative Bibliography of ISIS I (1, 2), II obsahuje sebranou bibliografii publikovanou každoročně v časopise společnosti historiků vědy USA — ISIS.

ISIS-Critical Bibliography (později *ISIS-Current Bibliography* – viz dále). Vychází každoročně jako páté číslo zmíněného časopisu a je členěna jak podle etap, tak i podle hlavních vědních oblastí.

Bulletin signaletique – 522. Histoire des Sciences et des Techniques je dějinám vědy a techniky věnovaný referativní bulletin vydávaný fracouzskou národní radou badatelskou.

Kenneth O. May: *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics* (1973) soustřeďuje literaturu k jednotlivým matematikům a u nich uvádí jejich časové zařazení.

Česká bibliografie dějin přírodních věd, lékařství a techniky (Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky II (1955) až XII (1967), Zprávy Čs. společnosti pro dějiny věd a techniky 8 (1967), 13 (1969).

Výběrová bibliografie českých a slovenských prací z dějin věd a techniky 1970-1980 in: Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Special Issue 15 (1981), 22 (1985) a v pokračování této řady New series 6 (2002).

J. Tibenský: *Bibliografia prírodných, lekárskych a technických vied na Slovensku do roku 1850 I–II* (1976-1978).

Matematické referativní časopisy — oddíl dějin matematiky

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (1868-1941)

Zentralblatt für Mathematik (od 1930)

Mathematical Reviews (od 1941)

Referativny žurnal — Matematika (od 1951)

Bulletin signaletique – Histoire des Sciences et Techniques

ISIS – Current Bibliography (v současné době je obsah CB z let 1975–2002 dosažitelný on-line na Research Libraries Information Network (RLIN)).

V těchto referativních periodikách jsou uváděny stručné recenze titulů (článků i knih) publikovaných v daném období. U většiny titulů je charakteristika obsahu, u závažnějších titulů je uvedeno obsáhlejší hodnocení, takže je zde možné poznat názor na danou práci v době jejího vzniku. Samostatné oddíly jsou pak věnovány dějinám matematiky a obecným problémům matematiky. Je zajímavé, že většina posluchačů se s těmito časopisy během studia vůbec neseznámí.

Strojově zpracované bibliografie

V posledních desetiletích 20. století se začalo rozvíjet napojení našich informačních systémů na zahraniční databanky bibliografických informací. Tam bylo možné hledat podle hesel (a kombinací hesel) například údaje z historie nebo z úseku „věda o vědě“ a získat tak už vytištěnou bibliografii. Obdobnými systémy disponovaly například též „History of Science“ nebo „Mathematical Reviews“, kde bylo možné získat i otisk recenze příslušného titulu. Tyto systémy byly budovány vždy jen od určitého roku, takže starší literaturu zcela opomíjely a ta musí být zkoumána klasickým způsobem. Ostatně tento druh informace byl brzy překonáván dalšími prostředky.

Internet. Pomocí vyhledávačů (Seznam, Google aj.) lze zvolit heslo či jméno a získáme nejrychlejší informace k hledané oblasti. Internet také rychle přináší jak přehledy literatury, tak některé informace o odborném životě (např. internetová konference s případným názvem „mersenne“), dále některé prameny informací (na př: Other history of mathematics pages on the web, nebo Biographies of mathematicians, Other mathematics resources, History of Science pages aj), tak i některé elektronické časopisy i knihy (např. Books on-line) z oboru. Math-Net Links obsahuje např. „Mathematical Museum“ a v něm sekce „History of Mathematics“, „History of Computing and Communication“ nebo „Related History Information“. V poslední době jsou na Internetu dostupné i celé klasické knihy či články. Blíže třeba Stellner, Poláček, *Internet nejen pro historiky* (2003).

Přehledná literatura k dějinám matematiky

Na tomto místě nemůžeme dělat obsáhlejší seznam literatury. Poznamenejme alespoň dostupnější tituly. Upozorňuji, že zejména v novější literatuře najdeme mnoho dalších bibliografických údajů.

Cantor, M.: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik I–IV* (1894-1908)

Struik, D. J.: *Dějiny matematiky* (1961)

Kolman, A.: *Dějiny matematiky ve starověku* (1968)

Juškevič, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku* (1978)

Juškevič, A. P. a kol.: *Istorija matematiki I–III* (1970-1972)

Juškevič-Kolmogorov (ed.): *Istorija matematiki v 19. věke I, II, III* (1979, 1981)

Rybnikov: *Istorija matematiki* (1974 2. vyd.)

J. Stillwell: *Mathematics and Its History*, Springer Verlag 1989

Šedivý, J. a kol.: *Světonázorové problémy matematiky I–III* (1983-1985)

Fuchs, E. a kol.: *Světonázorové problémy matematiky IV* (1986)

Dějiny matematiky a fyziky v obrazech 1–8 (1982-1989)

Burbaki, N.: *Očerki po istorii matematiki* (1963)

Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Time* (1972)

Wussing, H.: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik* (1979)

Diedonné: *Geschichte der Mathematik 1700–1900* (1985)

Grattan-Guinnes, Ivor: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the mathematical Sciences* (1994)

Grattan-Guinnes, Ivor: *The rainbow of Mathematics* (1997 — s 25 stranami bibliografických údajů!)

Dauben, J. W.: *The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A selected bibliography* (1985)

Jean-Paul Pier (ed.): *Development of Mathematics 1900–1950*, Birkhäuser Verlag, 1994, 729 str. *Development of Mathematics 1950–2000*, Birkhäuser Verlag, 2000, 1372 str.

N. K. Artemiadis: *History of Mathematics. From Mathematician's Vantage Point*, American Mathematical Society, Providence 2004, 454 str.

Antická a předantická matematika

A. A. Vajman, *Šumero-vavilonskaja matematika III–I tysjačletija do n. e.*, Moskva 1961

K. Vogel: *Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, München 1929

K. Vogel: *Vorgriechische Mathematik*, Hannover-Paderborn 1958

O. Neugebauer: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, I. Bd. Vorgriechische Mathematik* (2. vyd. Berlin–Heidelberg–New York 1969)

Q. Vetter: *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Praha 1926

Van der Waerden, *Probuždajuščajasja nauka*, Moskva 1959 (holandský originál 1950)

O. Nejgebauer: *Točnye nauki v drevnosti*, Moskva 1968 (2. angl. vyd. 1957)

H. Wussing: *Mathematik in der Antike*, 2. vyd. 1965

A. Szabó: *Anfänge der griechischen Mathematik*, Budapest 1969 (angl. vyd. 1978)

M. Ja. Vygodskij: *Aritmetika i algebra v drevnem mire*, 2. vyd. 1957

J. Klein: *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, MIT 1968

Ś. Kulczycki: *Z dziejów matematyki greckej*, Warzsawa 1973

H. Gericke: *Mathematik in Antike und Orient*, Springer Verlag 1984

Dějiny speciálních problémů matematiky

ARITMETIKA A ALGEBRA

K. Meinninger: *Kulturgeschichte der Zahlen*, Breslau 1934

E. Löffler: *Ziffern und Ziffersysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Leipzig–Berlin 1912 (1918)

A. K. Manejev: *Filosofskij analiz zenonovskich aporij*, Minsk 1972

G. P. Matvijevskaja: *Učenie o čisle na srednevekovom vostoke*, Taškent 1967

J. P. Matvijevskaja, *Razvitije učenija o čisle v Evrope do 17. veka*, Taškent 1971

E. P. Ožigova: *Razvitije teorii čisel v Rossii*, Leningrad 1972

F. Kympan, *Istorija čisla* π, Moskva 1971

V. Litcman: *Teorema Pifagora*, Moskva 1960

I. Ja. Depman: *Istorija arifmetiki*, Moskva 1959

L. E. Dickson: *History of the Theory of Numbers 1–3*, Washington 1919-1927

T. Muir: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, I–IV*, London 1906–1923

T. Muir: *Contribution to the History of Determinants 1900-1920*, London 1930

H. Wussing: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Leipzig 1968

H. Mehrtens: *Die Entstehung der Verbandtheorie*, Hildesheim 1979

L. Nový: *Origin of Modern Algebra*, Praha 1973

V. A. Nikiforovskij: *Iz istorii algebry XVI–XVII*. vv., Moskva 1979

E. Scholz: *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien, Zürich 1990

J. Lützen: *The Prehistory of the Theory of Distributions*

B. Chandler, W. Magnus: *The History of Combinatorial Group Theory*

Djafari, Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wussing: *4000 Jahre Algebra* (2003)

ANALÝZA

H. N. Jahnke (ed.): *History of Analysis*, American Mathematical Society 2003, 422 str.

M. E. Baron: *The Origin of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press 1969

C. B. Boyer: *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York 1959

I. Grattan Guinness: *The Development of the Foundation of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Cambridge Mass., 1970

J. N. Pesin: *Razvitije ponjatija integrala*, Moskva 1966

F. A. Medveděv: *Razvitije ponjatija integrala*, Moskva 1974

Th. Hawkins: *Lebesgue's Theory of Integration*, London 1970

Markuševič: *Očerki po istorii teorii analitičeskich funkcij*, Moskva–Leningrad 1951

A. F. Monna: *Funktional Analysis in Historical Perspective*, 1973

F. A. Medveděv: *Francuzskaja škola teorii funkcij i množestv na rubeže XIX–XX vv.*, Moskva 1976

F. A. Medveděv: *Očerki istorii teorii funkcij dějstviteľnovo peremennovo*, Moskva 1975

A. B. Paplauskas: *Trigonometričeskie rjady ot Eulera do Lebega*, Moskva 1966

H. H. Goldstine: *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*

H. H. Goldstine: *A History of Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*

F. A. Medveděv: *Razvitije teorii množestv v 19. veke*, Moskva 1965

E. Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser Verlag 1980

G. H. Moore: *Zermelo's Axiom of Choice*

Matematická logika

N. I. Stjažkin: *Formirovanije matematičeskej logiki*, Moskva 1967

L. E. Majstrov: *Teorija verojatnostej. Istoričeskij očerk*, Moskva 1967

Pravděpodobnost a statistika

I. Schneider: *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte*, Wissenschftliche Buchgesellschaft Darmstadt

D. B. Owen, ed.: *On the History of Statistics and Probability*, 1976

A. I. Dale: *A History of Inverse Probability. From Thomas Bayes to Karl Pearson*, Springer Verlag 1881

S. M. Stigler: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, Harvard University Press 1986

Geometrie

J. Gray: *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, Claredon Press Oxford 1979

B. Boyer: *History of Analytic Geometry*, New York 1956

M. I. Crowe: *A History of Vector Analysis*, London 1967

D. Dž. Strojk: *Očerki istorii differenciaľnoj geometrii do 20. stoletija*, Moskva 1941

J. B. Pavlíček: *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Praha 1955

J. L. Coolidge: *A History of Geometrical Method*, Oxford 1940

F. Kadeřávek: *Geometrie a umění v dobách minulých*, Praha 1935

F. Kadeřávek: *Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk*, Praha 1954

N. N. Rostovcev: *Istorija metodov prepodavanija risovanija v zaruběžnych školach*, Moskva 1971

P. J. Booker: *A History of Engineering Drawing*, London 1963

K. Andersen: *Brook Taylor's Work on Linear Perspective*, Springer Verlag 1992

P. Schreiber, Ch. Scriba: *5000 Jahre Geometrie* (2001)

VÝPOČETNÍ TECHNIKA

W. de Beauclair: *Rechnen mit Maschinen*, Vieweg 1968

The Origins of Digital Computers (Selected Papers), Springer 1973

I. A. Apokin, L. E. Majstrov: *Razvitije vyčisliteľnych mašin*, Moskva 1974

H. H. Goldstine: *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton Univ. Press 1972

A Computer Perspective, Harward Univ. Press 1973

H. Glade, K. Manteufel: *Am Anfang stand der Abacus. Aus Kulturgeschichte der Rechengeräte*, Leipzig-Jena-Berlin 1973

R. S. Guter, Ju. L. Poluner: *Ot abaka do kompjutera*, Moskva 1975

J. Vlček: *Výpočetní technika v zemích RVHP (ČSSR)*, Praha 1975

Computing Technology. Past & Future, in: Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum. New series Vol. 5, Prague 2001

TOPOLOGIE

N. L. Biggs, E. Keith Lloyd, R. J. Wilson: *Graph Theory 1736–1936*, Oxford 1976

J.-C. Pont: *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Paris 1974

J. Dieudonné: *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser Verlag 1989, 670 str.

Jean-Paul Pier: *L'Analyse Harmonique. Son développement historique*, Mason Paris etc. 1990

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

J. Gray: *Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser Verlag 1986, 496 str.

V. A. Dobrovoľskij: *Očerki razvitija analitičeskoj teorii differencialnych uravnenij*, Kijev 1974

RŮZNÉ

Problemy Giľberta, Moskva 1969

A. Nysabajev, G. Šljachin: *Razvitije poznanija i matematika*, Alma Ata 1971

W. P. van Stigt: *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, 1990

G. I. Ruzavin: *Matematizacija naučnogo znanija*, Moskva 1977

Dějiny matematiky v jednotlivých zemích

L. Nový a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. stol.*, Praha 1961

J. Tibenský: *Dejiny vedy a techniky na Slovensku*, Martin 1979

I. Grattan-Guinness: *Convolutions in French Mathematics 1800–1840, I The Settings), II (The Turns), III (The Data)*, Birkhäuser Verlag 1990, 1500 str.

Istorija otečestvennoj matematiki, Kijev I (1966), II (1967), III (1968), IV_1 (1970), IV_2 (1970)

A. P. Juškevič: *Istorija matematiki v Rossii*, Moskva 1968

B. Datta, A. H. Singh: *History of Hindu Mathematics I–II*, Lahore 1935–1938

A. I. Volodarskij: *Očerki istorii srednevekovoj indijskoj matematiki*, Moskva 1977

Y. Mikami: *The Development of Mathematics in China and Japan*

J.-C. Martzloff: *Histoire des mathématiques Chinoises*, Masson Paris etc. 1988, 400 str.

J. Needham: *Science and Civilization in China III. (Mathematics and the Science of the Heavens and the Earth)*, Cambridge 1959

Dianni, Wachulka: *Tysiac lat polskiej mysli matematycznej* 1963

K. Kuratowski: *Pól wieka matematyki polskiej 1920–1970*, Warszawa 1973

T. Iwiński: *Ponad pól wieku działnośći matematyków polskich*, Warzsawa 1975

G. S. Andonie: *Istorija matematici in Romine I, II*, Bucharest 1966

H. Gericke: *Mathematik im Abendland*, Springer Verlag 1990

Dějiny matematiky a středoškolská problematika

F. Balada: *Z dějin elementární matematiky*, Praha 1959

J. Tropfke: *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter, Bd 1–7*, 2.vyd. Leipzig 1921–24, 3. vyd. sv. 1–4 (1940)

M. Rode, Ch. Wiesenburg, K. Zillmann: *Möglichkeiten zur Nutzung von Sachverhalten aus der Geschichte der Mathematik für die weltanschauliche Erziehung im Mathematik-Unterricht der Oberschule (Dokumentation)*, Potsdamer Forschungen Reihe B, Heft 4, pp. 3–113, Potsdam 1974

Bunt L. N. H., Jones P. S., Bedient J. D.: *The Historical roots of Elementary Mathematics*, 1976

Gleizer, G. I.: *Istorija matematiki v škole IV.–VI. kl. Posobie dlja učitelej*, Moskva 1981

Historical Topics for the Mathematics Classrooms, 31$^{\text{st}}$ Yearbook published by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington 1969

History in the Mathematics Classroom, The IREM Papers. Volume 1 (J. Fauvel, ed.), The Mathematical Association 1990

F. Cajori: *A History of Mathematical Notation, I, II*, Chicago 1928, 1930

N. I. Kobancov: *Matematika i romantika*, Kijev 1976

Dějiny Jednoty českých matematiků a fyziků

V. Posejpal: *Dějiny Jednoty českých matematiků*, Praha 1912

F. Veselý: *100 let Jednoty čs. matematiků a fyziků*, Praha 1962

R. Košťál: *Vznik a vývoj pobočky JČMF v Brně*, Brno 1976

M. Bečvářová: *Z historie Jednoty (1862–1869*, Praha 1999

Časopisy z dějin věd a techniky, obsahující i problematiku z dějin matematiky

Historia mathematica, Academic Press (od. r. 1973)

Archive for the History of Exact Sciences

Voprosy istorii jestěstvoznanija i techniki, Moskva

Kwartalnik historii nauki i techniki, Warzsawa

DVT — Dějiny věd a techniky, Praha

NTM — Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, Leipzig

ISIS — An international review devoted to the history of science and its cultural influences, Washington

Annals of Science, London

Physis, Florence

Janus, Bruxelles

Archives Internationales d'Histoire des Sciences, Cambridge

Revue d'Histoire des sciences et de leurs applications, Paris

Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, Praha

Abhandlungen und Berichte des Deutschen Museum, München

Historical Studies in the Physical Sciences, Boston

Práce z dějin přírodních věd, Praha

Práce z dějin techniky a přírodních věd, Praha

Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky I–XII (do roku 1967), Praha (obsahuje v závěru svazků Českou bibliografii k dějinám věd a techniky)

Zprávy Komise pro dějiny přírodních věd a techniky, Praha

Zprávy Čs. společnosti pro dějiny věd, lékařství a techniky, Praha (Pokračování české bibliografie k dějinám věd a techniky)

Sborník pre dejiny vied a techniky na Slovensku, Bratislava (Slovenská bibliografie dějin věd a techniky)

Od roku 1995 vydává Jednota českých matematiků a fyziků v nakladatelství Prometheus obsáhlou českou knižnici „Historie matematiky“

— — —

V uvedené literatuře najdeme dostatečné množství dalších odkazů na literaturu, ať už detailnější, nebo na starší práce.

Uvedená základní přehledná literatura z dějin matematiky přináší prvé obsáhlejší seznámení se studovanou problematikou, je podkladem pro prvé kompilativní studie o otázce, které slouží jako podklad k úvodu do vlastní práce, protože ukazují, co dosavadní literatura o zkoumané problematice zná. Stejně tak odtud čerpáme i prvé zařazení jednotlivých matematiků do kontextu jejich problematiky a doby a teprve pak se snažíme najít podrobnější literaturu o nich.

Vedoucí práce by neměl opomenout komentovat charakter této přehledné literatury — vyzdvihnout její přednosti i systematické nedostatky či dokonce zásadní opomenutí.

Na základě znalosti těchto pramenů studia by posluchač měl začít vlastní rešeršní práci. To znamená vyhledávat a číst dostupné práce, dělat si výpisky, srovnávat zaznamenané názory, pokoušet se je hodnotit a snažit se studiem originálních textů rozřešit rozpory literatury.

Metodika práce v dějinách matematiky

Práce v tomto oboru má, jak jsme již uvedli, poněkud jiný charakter, než práce ve vlastní matematice. Již jsme řekli, že předpokládá získání určitého stupně přehledu o znalostech zkoumané problematiky v dosavadní (nejen snadno dostupné!) literatuře. To předpokládá značný objem studia, čtení, dělání výpisků a poznámek.

V technice práce v dějinách matematiky se vyplácí od samého počátku si vést dvě základní kartotéky a systém výpisků, a to bez ohledu, postupujeme-li klasicky či máme-li k dispozici vlastní výpočetní techniku.

a) *Bibliografii*, kde si přesně zaznamenáme autora, titul, nakladatele, místo a rok vydání, rozsah a příp. i signaturu knihovny, v níž je exemplář uložen. Navíc je zde možné dodat
   (i) stručnou charakteristiku či obsah knihy,
   (ii) údaj, kde je třeba hledat výpisky z této publikace (případně kdy byla kniha studována).
b) *Biografii,* kde na kartotéčním lístku bude zaznamenána vedle celého jména a základních životopisných dat i charakteristika činnosti, místa působení, údaje o stěžejních dílech a rovněž bibliografie známých prací o dané osobě. Tyto údaje po delší době nabývají značného praktického významu.
c) *Výpisky z literatury* se prakticky osvědčilo dělat do sešitů průběžně a tyto sešity také průběžně číslovat. (Číslo sešitu se pak objeví na bibliografické kartě!). Vlastní výpisky píšeme jen na pravé stránky sešitu. Levou stranu ponecháme na vlastní postřehy a poznámky, které nás v okamžiku četby napadnou, což je velice důležité pro konečnou fázi práce. Na levou stranu rovněž uvádíme vlastní odkazy na další literaturu apod. (Nezapsaný nápad často upadne v zapomenutí!).

Poznámky ke zpracovávání shromážděného materiálu. Materiál shromážděný z literatury o předmětu nebo i z četby originálních textů není možné jen kompilativně skládat do nového celku. Je třeba ho podrobit konfrontaci mezi sebou, potvrdit či vyvrátit názory předchozích autorů, kombinací se pokusit dojít k závěrům převyšujícím, obohacujícím závěry dosavadního bádání. Zde se nejlépe projeví talent začínajícího autora. Přitom je nezbytný kritický přístup ke všem materiálům, které byly shromážděny i uměřenost při jejich výkladu. Zásadně při zpracování převládají dvě hlediska. Prvé zdůrazňuje daný fakt na základě rozboru jemu předcházejícího vývoje jako výsledek, dovršení určitých tendencí. Druhé se pak na daný fakt dívá jako na východisko dalších tendencí v matematice. Je to většinou dáno zaměřením a možnostmi autora, ale objektivně vzato by se v každé práci měla obě hlediska snoubit, protože každý matematický jev lze chápat oběma způsoby. Kritika pramenů práce je pak nutná k přiměřenému hodnocení, zbavenému přílišné aktualizace. Bezesporu se však nevyhneme skutečnosti, že historik matematiky druhé poloviny 19. století na některá fakta z jejího vývoje v první polovině 19. století bude pohlížet jinak než historik pracující ve druhé polovině 20. století. Progres matematického poznání zde nutně ovlivňuje i historické hodnocení.

Zpracování výsledného textu. Ten by měl být zpracován tak, aby bylo zřejmé, která fakta a hodnocení autor přejímá a kde začíná jeho vlastní přínos. To předpokládá pečlivé uvádění odkazů na použitou literaturu, aby byla možnost uváděná fakta či tvrzení v této literatuře zpětně ověřit. Způsobů citace je několik, každý se s nimi rychle seznámí při čtení seriozní historickomatematické literatury. Jistě není podstatné, pro který ze způsobů se autor rozhodne, formálně by však citace měly být jednotné a především jednoznačné v celé práci. Způsob a pravidla citace stanoví a závazně předepisuje původní norma z roku 1970 ČSN 010197, která je zpřesněna v prosinci 1996 na základě mezinárodních norem jako ČSN ISO 690–1. Předepisuje pořadí prvků citace a stanoví pravidla transkripce a formální úpravy informací získaných z primárního informačního zdroje. Blíže např.: http://beta.pedf.cuni.cz/biblcit.htm

Hledání potřebné literatury. Vyhledáním potřebného titulu nebo názvu článku práce s obstaráváním literatury nekončí. Je třeba vědět, ve které knihovně je největší naděje danou publikaci či časopis najít. Z toho vyplývá:

(a) poučit se (např. v Internetu), kde jsou *knihovny s matematickou literaturou*, kdy vznikaly a jaké tedy fondy obsahují (staré nebo nové). Ze zkušenosti víme, že většina posluchačů ví o existenci fakultní či Státní vědecké knihovny, zpravidla však neví o existenci významných knihoven jiných institucí. Tak v Praze existuje Národní knihovna s více dislokovanými katalogy, Technická knihovna, Základní knihovna AVČR, Knihovna Matematického ústavu AVČR, Strahovská knihovna, Knihovna Národního muzea atd. V Brně je to např. rovněž Universitní knihovna, Ústřední knihovna VUT s dislokovanými knihovnami na jednotlivých fakultách, obsáhlá knihovna AVČR aj. V někdejších krajských městech jsou Státní vědecké knihovny apod.;

(b) poučit se, že existují *knihovny s literaturou z dějin věd a techniky* a v nich lze najít i fondy k dějinám matematiky. Zde je evropsky unikátní *knihovna dějin přírodních věd na MFF UK v Praze*. Jisté fondy dále v Praze chová i *Knihovna AV ČR, Knihovna Národního technického muzea*, jisté fondy jsou i v *Archivu AVČR*;.

(c) poučit se, že existují *soupisy zahraničních časopisů* v knihovnách ČR, které zachycují, byť s poměrně velkým zpožděním, veškeré zahraniční časopisy v knihovnách celé republiky. Navíc Matematický ústav AVČR v Praze vydal ve dvou vydáních soupis matematických časopisů ve vybraném okruhu knihoven a Československá společnost pro dějiny věd a techniky vydala v publikaci „Práce z dějin přírodních věd 2“ (H. Kolářová), soupis zahraničních časopisů z dějin věd a techniky v našich knihovnách. Jestliže se ukáže, že časopis není na území ČR, je možné si ho vypůjčit mezinárodní výpůjční službou, což však znamená nejistotu a v každém případě zdržení a finanční náklady navíc.

Pokud by se prokázalo, že literatura ke stanovenému tématu není vůbec k dispozici, bylo by zřejmě nutno v případě diplomové práce téma pozměnit. Je pochopitelné, že v badatelské práci je situace jiná.

Práce v archivech patří mezi důležité zdroje dalších informací bez kterých se některé práce historika matematiky nemohou obejít.

Tuto skutečnost je třeba mít na paměti a snažit se už při volbě tématiky odhadnout v kterých archivech by se jaké materiály k danému tématu mohly objevit. K orientaci po českých archivech poslouží Československou společností pro dějiny věd a techniky v Pracích z dějin přírodních věd 2(1971), 8(1976), 9 (1978) a 10(1980) vydané přehledy fondů k dějinám věd a techniky v jednotlivých veřejných archivech České republiky, podle někdejšího krajského členění. Bližší informace lze pak získat z vydaných průvodců po archivních fondech jednotlivých archivů. K archivnímu studiu — také s ohledem na období jehož se výzkum týká — je třeba dalších znalostí včetně např. paleografických, ale i znalostí o charakteru administrativní správy a jejích zvyklostech v daném období. Archivní materiály, stejně jako literární zpracování nelze přijímat bez výhrad, ale vždy je podrobit důkladné historické kritice.

Internet jako badatelská pomůcka. Vedle pečlivých a seriózních formulací, a zejména informací o současných předních vědcích (které jsou zatím v literatuře nedostupné) se zde objevují i některé „pseudovědecké" historické pokusy, kde opatrnost při jejich využití a kritika obsahu jsou na místě.

— — —

Práce z historie matematiky má mezi matematickými pracemi zvláštní postavení. Nepřináší sice matematické výsledky, ale stává se nástrojem globálního pohledu na matematiku a tím i prostředkem jejího poznání. Stává se i objektivní pamětí matematiky (Kenneth May ukázal kolik „znovuobjevů" neznalost předchozího vývoje matematiky přinesla jen v jedné úzké oblasti matematiky), je nezbytná jako podklad při vytváření jakékoliv koncepce v matematice, skýtá materiál k řešení obecných otázek a je předstupněm filozofických zobecnění v matematice. V neposlední řadě je třeba mít na mysli, že práce v historii matematiky je bez matematického vzdělání nemyslitelná a proto je jí třeba věnovat pozornost v rámci matematického vzdělávání. Proto je na místě rozvíjet tvůrčí práci v dějinách matematiky už v době přípravy na povolání spojené s matematickým vzděláváním. Práce v historii matematiky by se měla rozvíjet ve spolupráci matematickým studiem prošlého specializovaného historika a aktivního matematika. Historik může zkoumaný problém vidět v jeho historických (v širokém smyslu slova, tj. společenských, ekonomických, filozofických aj.) souvislostech a podmíněnostech, přičemž mu nezbytně budou unikat důsledky a podnětnost tohoto problému pro současnou matematiku. Tento nedostatek však právě snadno překoná aktivní matematik. Nadto by asi v historii matematiky měla existovat i trvalá „dvoufázová" spolupráce, kdy matematik analyzuje matematické rysy problému a matematicky vzdělaný historik se pokusí o jejich syntézu. Matematik opět může využít historie jako jistého druhu objektivní paměti pro vlastní vědeckou inspiraci. V tomto smyslu by asi spolupráce matematiků a historiků matematiky byla nejplodnější.

3. Prehistorické počátky počítání

První souvislé matematické texty, jež se nám dochovaly, pocházejí z oblasti Egypta a Mezopotámie. Řadíme je do 3. až 2. tisíciletí před n. l. Úroveň matematických znalostí v nich obsažených však naznačuje, že rozvoj matematiky začal dávno před vznikem těchto textů. Nepříliš znatelný další vývoj matematiky až do poloviny 1. tisíciletí př. n. l. nám naznačuje, že i vývoj matematiky byl neobyčejně dlouhý a pravděpodobně zahrnoval celou etapu, během níž se vytvářel člověk dnešního typu se svou společenskou organizací, řečí, dělbou práce a celou kulturou.

Z tohoto prehistorického období nemáme téměř žádné hmotné doklady, které by dokumentovaly počtářské praktiky, znalosti či pojmy, proto jsme nuceni obracet se k nepřímým pramenům a uvážlivě tvořeným analogiím, abychom získali obraz prehistorického vývoje matematiky. Takový obraz bude mít nesporně své oprávnění, avšak bude jen *logickou konstrukcí* — modelem, který sice nebude odporovat známým historickým faktům, ale bude postrádat přesné časové zařazení.

K vytváření zmíněného obrazu mohou přispět tyto prameny:

- studium způsobů počítání u etnických skupin stojících na nízké úrovni svého kulturního vývoje
- studium jazyka, který je v mnoha ohledech značně konzervativní; srovnávání výsledků tohoto studia se studiem současných i starých jazyků především ve vztahu k matematickým pojmům
- studium a srovnávání různých lidových počtářských praktik v různých oblastech světa
- usuzování na analogii mezi ontogenezí a fylogenezí, tj. mezi tím jak se jednotlivec postupně zmocňuje kvantit a jak se jich zmocňovalo lidstvo
- studium nálezů z prehistorie, tj. hmotných předmětů (vrubovek apod.)

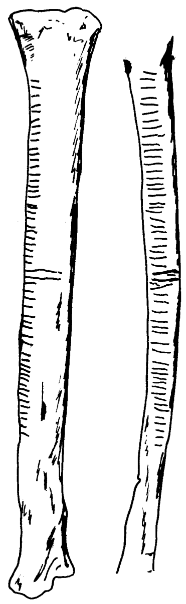
V roce 1923 *D. E. Smith* analyzoval slova označující množství v jazycích kmenů, které byly na nízkém stupni kulturního vývoje; došel k závěru, že „*... obecně lze říci, že matematika v kontaktu s potřebami primitivního života ovládala taková čísla, která byla těmito potřebami vyvinuta.*“ Smith byl plně přesvědčen o souvislosti rozvoje pojmů vztahujících se k popisu množství a rozvoje úrovně společenského života; své přesvědčení přitom získal z rozboru novodobých (a tedy nepřesných) materiálů.

Věstonická vrubovka

Za jeden z nejstarších přímých dokladů matematické činnosti lidí bývá někdy považována tzv. věstonická vrubovka nalezená *prof. Absolonem* dne 19. srpna 1936. Před druhou světovou válkou profesor Absolon publikoval o svém nálezu jen dvě krátké zprávy. Jednu v Illustrated London News z 2. října 1937 a o rok později v časopise amerických historiků vědy ISIS (vol. 28, str. 462–3). Teprve po 2. světové válce se dostalo celému výzkumu kompletní výzkumné zprávy.

Vrubovky, rabuše, rováše, počítací hůlky, patřily mezi početní instrumenty prostých negramotných lidí i v Evropě až do 20. století, a v některých oblastech světa se používají dodnes.

Věstonický nález tvoří 18 cm dlouhá vřetenní kost mladého vlka s 55 vyrytými zářezy. Ne všichni interpreti nálezu souhlasí s Absolonovým názorem, že „(zářezy) *představují pojmy číselné, násobky pěti …, jednou pětkrát pět, podruhé šestkrát pět, …*“. Poslední (či snad první?) zářezy obou skupin jsou téměř ve středu kosti výrazně protaženy. Absolonova argumentace o skupinách po pěti zářezech příliš neobstojí; už při pohledu na obrázek je zřejmé, že jen někde jsou skupiny pětičlenné. Není tedy důvod, abychom z jeho nálezu vyvozovali, že lovci mamutů na jižní Moravě (prof. Absolon odhadl stáří vrubovky na 10–30 tisíc let) znali pětkovou soustavu a uměli počítat do třiceti nebo až do 55. *Věstonická vrubovka navozuje několik otázek, které se týkají počátečního stavu početních znalostí lidstva:*



(1) Věstonická vrubovka (stáří 28 tis. let)

(a) jaké techniky pro počítání (počítadla) vyvinuli lidé nejdříve
(b) jaké způsoby uchovávání (záznamu) počtů věcí používali
(c) jak souvisely tyto hmotné prostředky pro počítání s jazykem, tj. s názvy počtu věcí či osob, s hromadnými kvantitativními pojmy (mírami) a se symboly různých množství (číslicemi)
(d) jak a kdy se pojem kvantity osamostatnil od předmětů, jejichž množství označoval (jde o vznik jednotlivých přirozených čísel s vlastnostmi kardinálních čísel, o vytváření číslovek a jejich soustav)?

Za předpokladu, že věstonická vrubovka je skutečně záznamem kvantit, bylo by spíše pravděpodobné považovat dvě skupiny zářezů za záznamy dvou porovnávaných množství. Každý zářez by pak vyjadřoval určité množství; posuvem nehtů palců obou rukou po zářezech by bylo možné přiřazovat vzájemně jednoznačně prvky obou množin a tak rozhodovat o jejich ekvivalenci. Na věstonické vrubovce by se ukázalo, že v jedné množině zbývá pět prvků. Vrubovku by tedy bylo možné považovat za počítadlo, které dávalo možnost porovnávat velká množství, aniž je „počtář“ uměl spočítat – tj. pojmenovat jejich množství číslovkami (ale dovedl třeba už číslovkou vyjádřit jejich rozdíl, tj. zjištěný zbytek).

Tento výklad se zdá být přijatelnější už proto, že podobné způsoby počítání při směně zboží byly zaznamenány například mezi kmeny v jihovýchodní Austrálii i v Africe. *J. Morgan* popsal směnu úhořů za koření:

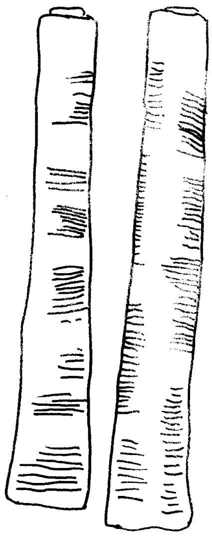
> *Dva muži jednoho kmene přinesli na dlouhých kusech kůry ryby a jiní dva z druhé strany koření. Potom své druhy zboží přenášeli na hlavách v určitých malých stejných množstvích (ekvivalentní směny) z jedné strany na druhou, a to tak dlouho, dokud nebyl alespoň jeden druh zboží vyčerpán. I zde se často mohla objevit potřeba zaznamenat, co bylo předáno navíc jednou stranou, tj. záznam druhé strany, který měl být vyrovnán při příští směně.*

Popsaná úvaha o jedné konkrétní směně zboží dokládá, že ani při výměně velkých množství zboží nebylo nutné vyjadřovat počty ekvivalentů; proto číselné pojmy dlouho nemusely být rozvíjeny a vystačilo se jen s číslovkami pro několik málo přirozených čísel.

Porovnávání dvojic množin různorodých předmětů (pokaždé jiných) mohlo postupem času přejít v porovnávání všech druhově rozmanitých množství se stále stejnou množinou věcí, která byla snadno realizovatelná či stále k dispozici v jakýchkoliv podmínkách (prsty rukou). To opět dovolovalo vystačit s několika málo číslovkami.

Věstonická vrubovka patřila mezi prvé nalezené artefakty tak značného stáří. Absolonův horní odhad se ukázal jako správný. Stáří je stanoveno na 28 tis. let.

Ovšem od té doby se objevilo dalších několik nálezů: Kost s vruby od osady Ishango u Edwardova jezera v Zaire (obr. 2), která je datována do období mezi 9 a 6,5 tisíci léty př. n. l. Později byla nalezena ještě paviání kost s vruby (obr. 3) v hraniční jeskyni v pohoří Lemombo mezi Jihoafrickou republikou a Svazijskem. Ta pak stářím odhadovaným na 35 tisíc let překonala i věstonickou vrubovku. Rovněž ze Sibiře pocházejí obdobné archeologické nálezy jak ukazuje práce Frolova. Zdá se, že interpretace dávané Absolonem věstonické vrubovce stejně jako Heinzelinem kosti z Ishango, vycházejí příliš z našich znalostí vlastností kvantit, číselných soustav a počítání. Tak třeba Heinzelin předpokládá, že lidé užívající ishagonskou vrubovku byli schopni počítat v desítkovém číselném systému a že v prvém sloupci zářezů na kosti jsou čísla umístěna do dvojic přičemž jakoby zde přicházelo k užití zdvojnásobování nebo půlení:



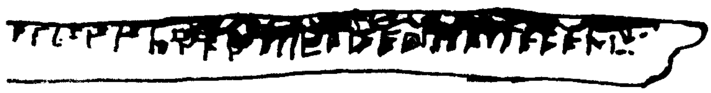
1. sloupec: 3,6 4,8 10,5 a 5,7
přičemž jakoby poslední dvojice spíš patřila k třetímu sloupci, kde bychom mohli předpokládat že si zaznamenali téměř všechna prvočísla do dvaceti

3. sloupec: 11 13 17 19
naproti tomu druhý sloupec jakoby obsahoval přičítání a odečítání jednotky od deseti a dvaceti

2. sloupec:	11	21	19	9
což je	(10+1)	(20+1)	(20-1)	(10-1)

(2) *Kost s vruby nalezená u osady Ishango u Edwardova jezera Zaire — doba 9 až 6,5 tis. let p. n. l.*

Na druhé straně Marshack, který provedl mikroskopickou analýzu všech vrubů na ihsangovské vrubovce, došel k závěru, že zářezy byly vykonány 39 různými nástroji a značky byly s největší pravděpodobností v úzké vazbě na data lunárního kalendáře. Tato analýza podporuje myšlenku postupného a nikoliv okamžitého vytvoření vrubového záznamu a tedy protiřečí interpretaci Heinzelinově.



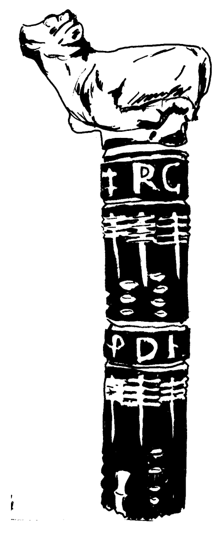
(3) Paviání kost s vruby z hraniční jeskyně v pohoří Lemombo (mezi Jihoafrickou republikou a Svazijskem) — stáří 35 tis. let

Žádný nález z tak staré doby bychom neměli považovat za příliš vědecký výsledek, zejména, když jde o velice řídké nálezy a nadto artefaktů, které se dochovávaly v „obchodních“ a „daňových“ záznamech počtů ještě dosti blízko naší době lidmi (nebo pro lidi), kteří neuměli počítat. Srovnáme-li pak početní techniku primitivních kmenů, jak je popisována některými cestovateli nebo misionáři, zjišťujeme, že neznali číslovky vyšší než dvě, tři či čtyři a snad jejich jednoduché kombinace. A přesto byli schopni vzájemně porovnávat různá větší množství bez numerace. Užívali velmi jednoduchého jedno-jednoznačného přiřazení (dnes bychom řekli bijekce) mezi prvky dvou množin, přičemž prvky zde netvořily jednotlivé předměty obdobné hodnoty, ale skupiny těchto předmětů hodnotově ekvivalentní skupinám předmětů z jiného množství.

Lze říci, že dnes porovnávání dvou množin přenášíme na společného nositele — přirozená čísla. To, jak je vidět, v primitivních kulturách nebylo, protože pojem čísla (počtu) zde byl ještě značně redukován na množství jednoho, dvou, tří předmětů a pojem mnoho, a tedy nemohla existovat ani přirozená posloupnost přirozených čísel ani úvahy o násobnosti či dělitelnosti počtu (tj. většího přirozeného čísla).

Pokuste se předložit problém porovnání dvou hromádek třeba kuliček a kostiček dítěti, které ještě neumí „čítat“. Ukáže se, že přirozeně bude používat jedno-jednoznačného přiřazení až do vyčerpání jedné hromádky. A představme si situaci, kdy se měla porovnávat dvě množství, která byla umístěna na různých místech a nebylo třeba, nebo možno, je přenášet a porovnávat tak, jak jsme to popsali. Pak bylo třeba pro takovou bijekci najít zprostředkujícího nositele — a to mohl být případ věstonické vrubovky. Každé množství se zaznamenalo od dvou dlouhých vrubů uprostřed na jednu nebo druhou stranu kosti. Pak stačilo jen pozorným a synchronním posouváním nehtů obou palců postupně na jedné straně dospět ku konci. To, co na druhé straně zbývalo, bylo navíc. Tento zbytek se mohl nakonec dopočítávat na prstech anebo jen pamatovat, a z daného množství vyloučit tolik předmětů, kolik jich příslušelo nehty neprošlým vrubům. Tedy vrubovka jako společný nositel dvou porovnávaných množství a mechanický pohyb rukou jako porovnávací proces. To by ukazovalo jak jednoduchý instrument mohl pomoci člověku překonat obtíž, kterou mu jeho intelektuální jednostrannost kladla do cesty.

Co se týká ishagonské vrubovky, je pravděpodobné, že Marshackova hypotéza o jejích zářezech jako o určitých kalendářních záznamech může být oprávněná, zejména, když je známo, že se podobné hůlky používají ke kalendářním účelům mezi primitivními africkými kmeny dodnes. Zda ovšem šlo vždy o kalendářní záznam je nejisté. Je ovšem možná i jiná interpretace. K. Menninger uvádí ve své knížce vrubovku, kterou používal švýcarský honák krav jako vnější paměť. S jarem sehnal krávy z celé vesnice a vyhnal je do hor spásat alpské louky a tam se s nimi zdržoval až do zámrazu. Mléko a výrobky z něj byly však transportovány do údolí, prodávány a peníze schraňovány. Teprve po podzimním návratu stáda do údolí přinesl pasák na své holi záznam, kolik která kráva vyprodukovala mléka. To byla pak pomůcka k dělení zisku. I u ishangovské vrubovky by mohlo jít o záznamy určité produkce či lovu a nebo počtu dobytka ap.



(4) Vrubovka švýcarského honáka krav

Podstatné na těchto pomůckách je, že umožňovaly pracovat s většími počty přesně podle potřeb, aniž by tehdejší lidé potřebovali mít nějakou soustavu na základě deset či pět, aniž by museli vytvářet názvy vyšších číslovek, vědět něco o násobnosti či dělitelnosti a pod. Zdá se zde, že množinové pojetí porovnávání dvou množství bylo při „pojmové nevyzrálosti lidí“ té doby dobrou a snadno zvládnutelnou pomůckou, a primitivní instrument, vhodně použitý, rozšiřoval už na primitivním stupni civilizace lidské možnosti. Nedává to věstonické vrubovce a koneckonců i všem instrumentům, které prodlužují možnosti a schopnosti člověka, přece jen hlubšího významu?

Číslovky

Podle *D. E. Smithe* se na základě rozboru jazyků australských kmenů dalo ukázat, že třicet z nich nemá číslovku pro počty větší než čtyři. Tyto větší počty vyjadřují neurčitou číslovkou „mnoho“, „velmi“ apod. Často existují jen dvě číslovky, další dvě se tvoří jejich skládáním. Například *Eisenstädter* uvádí jazyk domorodců z oblasti Coopers Creek, kde se z číslovek »guna« pro číslo 1, »barkula« pro číslo 2 tvořily složené číslovky »barkula-guna« pro číslo tři a »barkula-barkula« pro číslo 4. *Struik* píše o kmenech z povodí řeky Murray, které měly číslovky *enea* (1), *pečeval* (2), *pečeval-enea* (3), *pečeval-pečeval* (4). Objevily se ovšem i tři základní číslovky, jejich spojováním se získalo vyjádření počtu až do šesti; *Conant* našel příklad u kmene Kamilaroi:

1 … mal	4 … bulan-bulan
2 … bulan	5 … bulan-guliba
3 … guliba	6 … guliba-guliba

Nejde však jen o australské původní obyvatelstvo; Abiponové žijící v jižní Americe mají sice dvě číslovky *initara* (1), *inioka* (2), ale dovedou vyjádřit čísla do 20. Číslo 3 vyjadřují *inioka-initara*, ale 4 nazývají »prsty pštrosa«, 5 »prsty ruky«, 10 »prsty obou rukou« a 20 »prsty rukou i nohou«.

Pozůstatky primitivního číselného systému »jeden, dva, mnoho« nalezneme i v evropských jazycích, kde se v některých ustálených rčeních dodnes udržuje číslovka »tři« ve smyslu »mnoho«:

latinsky *ter-felix*	= velmi šťastný
řecky *trismegistro*	= velmi velký
francouzsky *très bien*	= velmi dobře
anglicky *»Trice is he armed«*	= velice se vyzbrojil

Objevuje se i způsob počítání po trojicích (Demarové v Africe), kdy tři kusy vytvářejí trojici, k ní se přidá druhá a třetí trojice. Obdobný způsob počítání po dvojicích uvádí *Smith* u afrických Pygmejů, kteří počítají:

1	2	3	4	5	6
a	oa	ua	oa-oa	oa-oa-a	oa-oa-oa

Jadžanové užívali číslovek *kaneli* (1), *kombaj* (2), *maten* (3), ale pro 4 si vytvořili tvar *akokombaj* (ve smyslu „další dvojka“) a pro 5 *akomaten* (další trojka po dvou).

Počítání po skupinách a gramatika

Zbytky počítání po skupinách se patrně projevují i v našem počítání „párů“, které je běžné ve všech indoevropských jazycích. Je možné, že právě tato kvalitativní odlišnost párů od jednotlivin na jedné straně a větších množství na druhé straně dala vzniknout dvojnému číslu (duálu) v gramatice mnoha jazyků. (Staroegyptština a některé australské jazyky používaly i trojné číslo podstatných jmen).

V češtině cítíme, že až do počtu šest se pro názvy skupin užívá především slov končících na *-ice* (dvojice, trojice, . . . , šestice); pro sedm a osm je běžnější říkat sedma, osma než sedmice, osmice, pro devět, deset, jedenáct atd. se ujaly názvy tvořené z jiné řady (pro číslovky) — devítka, desítka, jedenáctka atd. Zdá se, že tyto rozdíly jsou důsledky různých období vývoje jazyka v těch dobách, kdy se objevila potřeba tvořit názvy pro početnější skupiny.

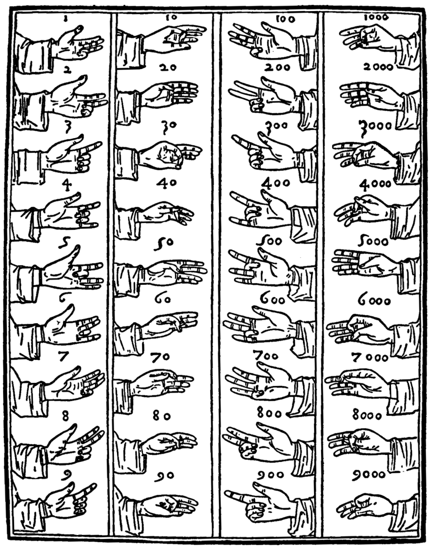
Gramatické postavení prvých číslovek je v češtině jiné než dalších číslovek. Říkáme dva muži, tři muži, ale pět mužů, ... I to svědčí o postupném rozšiřování číslovek pro přirozená čísla, nejprve do čtyř, pak dále. Starší etapu, kdy se asi užívaly jen číslovky pro 1 a 2, dokumentují rodová rozlišení — jeden, jedna, jedno; dva, dvě, dvě — která se u dalších číslovek již neuplatnila či neudržela (sanskrt zachovává tyto rodové tvary i pro číslovky tři, čtyři).

Počítání na prstech a soustavy číslovek

Uvedli jsme již, že několik číslovek stačilo k „počítání“ větších počtů předmětů a že proběhl postupný přechod k porovnávání různorodých množství s prsty ruky (tj. s jedním množstvím jsoucím vždy pohotově). Latinské slovo *digitus* = *prst* svědčí o souvislosti s moderním významem *jednotka* (digitální počítače, hodinky ap.).

Příslušníci kmenů, které byly ještě v 19. století na primitivní úrovni svého kulturního vývoje, prstem ukazovali na počítané předměty. Andamani v Oceánii užívali číslovek pro 1 a 2; deseti dosahovali takto: malíčkem jedné ruky se dotkli nosu a řekli „úbatul“ (jedna), při dotyku druhého prstu „íkpór“ (dvě) a pak s každým dalším dotykem opakovali „anká“ (a tento). Po vyčerpání prstů obou rukou spojili ruce a řekli „ardúru“ (všechno) ve smyslu 10.

Kmen Pitta-Pitta v Queenslandu používal prstů rukou i nohou k odpočítávání předmětů, pomáhal si záznamy v písku, ale neměl vypracovánu soustavu názvů čísel. Papuánci na Nové Guineji počítali na prstech jedné ruky do čtyř za zvuku „be, be, be, be“, pak řekli „ibon be“ ve smyslu „celá ruka“ (5). Pokračovali s prsty druhé ruky až po „ibon ali“ (obě ruce = 10), ale potom též na nohou k „samba be“ (15) a „samba-ali“ (obě nohy = celý člověk = 20). Pro další počítání používali prstů na rukou i nohou další osoby.



(5) Vyjádření různých množství pomocí nastavení prstů. Podle Lucy Pacioliho knihy Summa de Aritmetica (1494)

Cestovatel Samuškin popsal stejný způsob počítání i u sibiřských Čukčů. U jedné osady napočítal 128 sobů a zeptal se hospodáře, kolik sobů vlastní. Ten soby nikdy nepočítal, ačkoliv bezpečně poznal, když chyběl byť jediný kus; po otázce se vydal k sobům a za dvě hodiny přišel s výsledkem 128. Jeho otec mu nevěřil, zul se a šel soby počítat sám starým způsobem; po třech hodinách se vrátil s týmž výsledkem, ale k jeho vyjádření „šest lidí a osm prstů“ ($6 \times 20 + 8$) nestačila pětičlenná rodina, proto přivedl dva lidi ze sousední jurty.

Mnohem racionálnější způsob „pozičního, dekadického, ale nepísemného“ záznamu čísel uvádí *Vetter* podle *Schrumpfa*. Při záznamu větších počtů si jihoafričtí domorodci vypomáhají tím, že jeden počítal na prstech jednotky, druhý na svých prstech počítal desítky těchto jednotek a třetí počítal desítky těchto desítek čili stovky.

Podle *Brunschvicga* někteří australští domorodci, kteří znali jen číslovky 1 a 2, počítali tak, že začali malíčkem levé ruky, prošli prsty levé ruky, pak její zápěstí, loket, podpaždí, rameno, klíční kost, hruď, poté symetricky pravou stranu těla až po malíček na pravé ruce. Počet předmětů vyjádřili slovem, které označovalo místo na těle, kam došli při popsaném postupu. Odtud mohlo vzniknout slovní vyjádření číslovky „pět“ výrazem, který původně znamenal celou ruku — pěst.

Toto přiřazování různých množství prstům ruky mělo své důsledky nejen pro názvy čísel, ale i pro systém číslovek, který se nejčastěji opíral o pětkový, desítkový nebo dvacítkový základ. Na příkladu Papuánců a některých jihoamerických kmenů jsme poznali počítání způsobem

$$\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \text{ruka}, \\ \text{ruka}+1, & & \text{ruka}+2, & & \ldots \end{array}$$

Homér, Aischylos, Plutarchos i Apollonios používali výrazu „pempazein“ (doslova „do pěti“) ve významu „počítání“; to znamená, že i předkové Řeků v prehistorii po dlouhou dobu počítali jen do pěti (na prstech jedné ruky). Ostatně, možná že i v této činnosti je kořen našeho úsloví „vypadá, jakoby neuměl do pěti počítat“. Staroslovanské slovo „pět“ je velmi podobné slovu „pěst“, a tato podobnost asi není náhodná.

V jedné části Paraquaye se „pětka“ vyjadřuje slovy „prsty jedné ruky“; význam spojení „prsty obou rukou“, „prsty obou rukou i nohou“ si snadno domyslíme. *Smith* uvedl, že průzkum sedmdesáti afrických jazyků ukázal, že v každém vystupovala desítka jako základ vyjadřování čísel. Existují soustavy, ve kterých se zřetelně uplatňovaly první tři číslovky prapůvodního počítání a pak číslovky pro 5 a 10, zatímco ostatní číslovky byly z nich odvozeny přičítáním či dočítáním. Tak třeba sibiřští Jukadžinové používali systém, v němž byly číslovky tvořené takto:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 3+1 \quad 5 \quad 2\times 3 \quad 2\times 3+1 \quad 2\times 4 \quad 10-1 \quad 10$$

Počítání na prstech rukou i nohou dalo základ dvacítkovému systému, který zanechal své stopy i v indoevropských jazycích. I v češtině je první dvacítka číslovek tvořena jinak než následující desítky. V angličtině se uchovalo několik významů termínu „*score*“; především prapůvodní význam v ustáleném rčení „*a score of times*“ jako velké neurčité množství, pak má význam dvacítky, ale současně i význam zářezu, vrubu atd. jakoby při dosažení 20 prstů byl počtář nucen udělat vrub na holi pro zapamatování napočítané dvacítky. Anglické sloveso score se užívalo jak ve smyslu „dělat vrub“, tak ve smyslu „připsat na účet“. Ve francouzštině se dodnes tvoří některé číslovky pomocí „vingt“, tj. dvaceti:

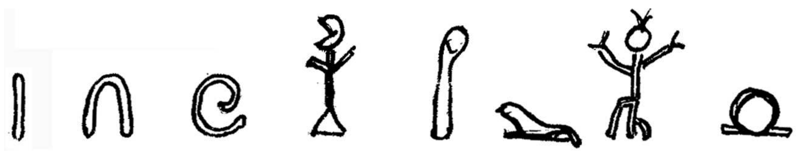
80 … quatre-vingt (= 4 dvacítky)
90 … quatre-vingt-dix (= 4 dvacítky deset)

Dvacítka byla základem i mayské číselné soustavy; v Grónsku se používá pro 20 téhož slova, které znamená „člověk“, pro 40 „dva lidé“. V dánštině se 50 vyjadřuje složeným termínem, *halvtredsinstyve*, který doslova znamená „polovina třetí dvacítky“.

Neurčitá číslovka „mnoho“; znaky pro množství

Setkali jsme se s tím, že termín užívaný pro číslo 3 měl původně význam neurčité číslovky „mnoho“. Tato situace se opakovala na řadě míst světa a pro různé číslovky; při rozšiřování oboru známých přirozených čísel nabylo to slovo, které mělo význam „mnoho“ v dosavadním oboru, významu zcela konkrétního (vyjádřilo jedno další přirozené číslo).

To lze vidět u hieroglyfů v egyptských papyrech, například hieroglyf pro 10^3 znázorňuje květ lotosu, kterých bylo v zátokách



1 10 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7

(6) Egyptské znaky pro jednotky množství desítkových řádů

Nilu mnoho; obdobně znak pro 10^5 je hieroglyfem pulce, tedy vývojové formy žab, kterých bylo v nilské vodě také mnoho.

Oba znaky znamenaly asi původně neurčité číslovky „mnoho“, teprve při rozlišování oboru známých přirozených čísel dostaly jednoznačný význam vyšších jednotek desítkové soustavy.

V Mezopotámii v souhlase s tamními způsoby písma byl pro záznamy množství užíván poziční systém o základu 60 využívající jen dvou symbolů — klínů vtištěných do hliněné tabulky . Pro 60^n, kde n je celé číslo, symbol 𒁹 a pro 10 symbol 𒌋. Tento systém už abstrahoval od konkrétních symbolů pro jistá konkrétní zprvu velká množství a připravoval půdu pro desítkový poziční systém dodnes používaný v běžném životě.

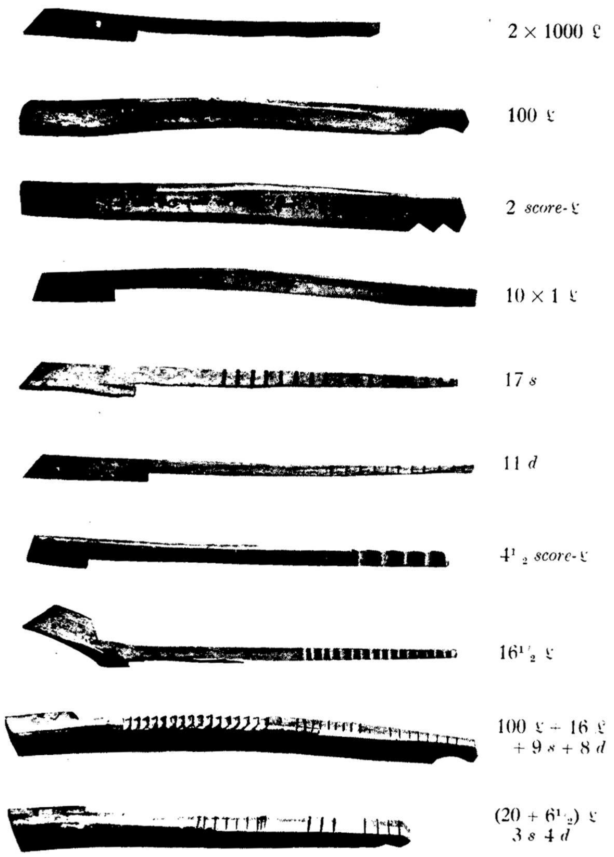
V obou těchto soustavách byla přirozená čísla obohacena o zlomky; v Egyptě tzv. kmenné (tj. s čitatelem 1) a v Mezopotámii o šedesátinné — tak jak si to vyžadovaly aritmetické operace.

Početní pomůcky — vrubovky a počítadla

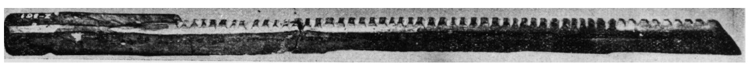
Počítání na prstech umožňovalo a do určité míry napomáhalo rozvoji prosté numerace v oboru do 10 či 20. Člověk se tak stal „všeobecným číselným ekvivalentem“ — prvním počítadlem, které bylo vždy po ruce. Avšak teprve vytvořením systému konstrukce dalších číslovek dospěly hospodářsky činorodé národy, resp. jejich obchodnické vrstvy, k potřebě počítadel. Pro vrstvy, které nedostávaly žádné vzdělání, stačily velmi prosté způsoby záznamu množství pomocí vrubovek; doplňme ještě několika poznámkami to, co jsme o vrubovkách už řekli.

Pomocí zářezů (vrubů) byla na vrubovkách či rabuších zaznamenávána porovnávaná množství, což umožnilo vyslovit závěr o nedostatku či přebytku jednoho z nich ve srovnání s druhým.

V češtině se dodnes užívá slov „vrub, vroubek“ ve smyslu dluh (i když ne ve smyslu finančním či materiálním); říká se též „Připište to na můj vrub“, v minulosti se v hospodské hantýrce říkalo „Pije na sekeru“ (na dluh; sekera byl nástroj, kterým se dělal vrub), „Dejte to na futro“ („připsání“ dluhu vrubem na dřevěný rám dveří).



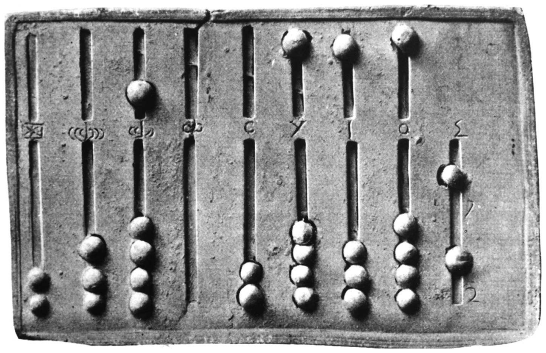
(7) Anglické vrubovky ze 13. století



(8) Vrubovka Bartoloměje Slepičky z r. 1627 (Muzeum Olomouc)

Vrubovka se záznamem nějakého množství se snadnou úpravou — podélným rozříznutím přes všechny vruby — stala smluvním dokumentem; jednu část si ponechal věřitel, druhou dlužník.

(9) Kyj domorodce z ostrova Fidži se zřetelnými 54 vruby
Záznam zcela jistě převyšoval jeho dovednost ve vyjádření tohoto množství slovně či číslovkami



(10) Římský abak ze sbírek v Louvru

(11) Soutěž mezi počtáři (Spor algoritmiků s abacisty)

Protože vruby byly nestejného tvaru a různě od sebe vzdálené, nebylo falšování prakticky možné, po přiložení obou částí k sobě by se každá jednostranná úprava stala zjevnou. Tento primitivní způsob záznamu množství se i v Evropě leckde udržel až do

19. století, což souvisí s nedostatečným vzděláním širokých vrstev. V předcházejících stoletích tato okolnost zamezovala rozšíření indickoarabského číselného záznamu v úředním styku; v Evropě se tento způsob prosazoval až od 13. století.

Pro počítání si lidé asi už v prehistorické době vytvořili počítadla typu abaku; nasvědčují tomu na příklad návody k řešení úloh v egyptských matematických papyrech. Toto počítadlo předpokládalo už rozvinutý desítkový číselný systém s představou o řádech číslic; v rámci každého řádu se počítalo jen s čísly 1 až 9 a „dokončené desítky" se převáděly do vyššího řádu. V trochu modifikované formě se jako počítání na linách udržel tento způsob až do 16. století i v Evropě.

Model prehistorického vývoje matematiky

Na základě uvedených faktů a na základě zkušeností z dalšího vývoje matematiky se můžeme pokusit o vytvoření modelu jejího prehistorického vývoje. Musíme si však uvědomit, že *skutečný vývoj nemusel být vždy identický s naší logickou konstrukcí.* Mnohé nové principy, které se zdají být logickým pokračováním nějaké všeobecně užívané metody (teorie, pojmové zásoby), nemusely na ni v dějinách lidstva přímo navazovat; naopak mohly nastupovat až s velkým zpožděním, protože staré principy trvají tak dlouho, dokud umožňují řešit problémy na požadované úrovni. Na druhé straně mohly vedle sebe po dlouhou dobu existovat různé principy, z nichž jeden se nám jeví jako nadřazenější, schopný nahradit starší, ale v dějinách ho nenahrazoval, protože toto nahrazení se nepovažovalo za důležitý krok.

S přihlédnutím k právě vyloženým skutečnostem vytvoříme jen určitou *aproximaci reálného vývoje aritmetiky.*

Velmi dlouhý a pomalý vývoj aritmetiky v prehistorii byl podmíněn společenskou dělbou práce, rozvojem směny, a byl rozhodně velmi nerovnoměrný. V prvé etapě lze pravděpodobně vidět dvě linie:

(1)*Postupné a velmi pomalé chápání a vyjadřování četnosti předmětů.* Počet předmětů byl zprvu pevně spojován s předměty, které se počítaly; obor přirozených čísel se rozšiřoval velice pomalu, pravděpodobně vždy po určitých skupinách čísel. Nejprve se zřejmě užívaly jen číslovky pro 1, 2, oněco později snad i 3 a „mnoho“; v počítání po skupinách předmětů a skupinách skupin (například po trojicích až ke třem trojicím) se patrně postoupilo dále. To dovolovalo překlenout nedostatek terminologie a samozřejmě i pojmové problémy.

(2) Ve společnosti s rozvinutější dělbou práce mohlo z ekonomické nutnosti směny probíhat vytváření ekvivalentů při směně mezi dvěma typy výrobků, které nezáviselo na počítání. *Opakované vytváření skupin stejných předmětů* muselo asi vést k intuitivní představě „stejné množství předmětů“ a posléze i k jeho vyjádření ekvivalencí skupin předmětů (resp. ekvivalentů). Přitom dlouho nemusel být počet předmětů (mnohost skupin) vůbec předmětem zájmu.

Obě linie se asi sešly při přiřazování předmětů (ekvivalentů, zboží) té množině, která byla použitelná pro každého člověka — prsty ruky, obou rukou, rukou i nohou — a stala se „mírou množství“. Asi až tehdy se projevilo *první rozšíření oboru přirozených čísel na pět,* později deset či dvacet, spolu s vytvořením číslovek pro všechna takto vyjadřovaná množství. Tyto číslovky mnohdy byly termínově příbuzné s počítáním na prstech.

Užívání desítkového systému pak umožnilo vznik počítání na abaku, vytvoření dalších aritmetických operací, především zdvojnásobování a půlení. Pomocí těchto dvou operací bylo pak prováděno násobení a do určité míry i dělení, které přineslo potřebu rozšířit obor používaných přirozených čísel o zlomky.

Číselné záznamy (tj. symboly čísel, rozšíření přirozených čísel o jistou třídu zlomků a technika počítání na počítadlech (abacích) umožnily rozšířit i celkový dosah matematických výpočtů. Posouvání kaménků v počítacích deskách (latinsky kaménky – calculi, počítání –calculare!) umožnilo rychlé sčítání a odčítání; násobení bylo prováděno pomocí zdvojnásobování (lat. duplatio), tj. pomocí sčítání čísla se sebou samým a dělení (včetně dělení složeným číslem) bylo převáděno na násobení ($x : y =? \rightarrow$ kolikrát y je x), přičemž se někdy využívalo i půlení (lat. mediatio).

To pak už v Egyptě dovolovalo řešit lineární rovnice o jedné neznámé (tzv. počet „h“), vypočítat procentní podíl, sčítat konečný počet členů geometrické řady. V Mezopotamii pak k tomu přibyly i soustavy rovnic, kvadratické rovnice, substituční metoda řešení rovnic a velmi prosté aproximativní metody.

Literatura

[1] Smith, D. E.: *History of Mathematics.* Vol. I, New York 1958.

[2] Absolon, K.: *Výzkum diluviální stanice lovců mamutů v Dolních Věstonicích* .... In: Budování musea a ústavu Anthropos v Brně, Brno 1945.

[3] Fabinger, F.: *O vývoji čísel, číslovek, číslic.* In: Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, XXXII, XXXIII.

[4] Struik, D. J.: *Dějiny matematiky.* Praha 1963.

[5] Vetter, Q.: *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury.* Praha 1926.

[6] Depman, I., Folta, J.: *Svět čísel.* Praha 1973.

4. Cesta k počátkům geometrie

Geometrické tvary se stávaly předmětem zájmu člověka snad už od doby, kdy svou rukou začal vytvářet předměty nezbytné k uchování života. Příroda mu skýtala množství motivů; geometrický tvar byl mnohdy jejich podstatnou vlastností, člověk tyto tvary porovnával a napodoboval. Je možné, že cesta k abstraktnějším geometrickým tvarům byla kratší než cesta k prvním aritmetickým pojmům, protože geometrické tvary působily na člověka bezprostředněji a na širší bázi.

Pro počátky geometrie však není rychlost vývoje podstatná; počátky geometrického myšlení můžeme spatřovat až v době, kdy si lidé uvědomili jednotlivé vlastnosti pozorovaných geometrických útvarů a snažili se tyto vlastnosti cílevědomě využívat pro některé pracovní úkony. Do té doby bylo řazení geometrických motivů spíše jen prostředkem estetického vyjadřování či uměleckého výrazu; opakování těchto motivů však bezesporu dávalo podněty k myšlenkám o vlastnostech geometrických útvarů — o jejich velikosti, oblosti, počtu vrcholů apod.

Geometrické úvahy však nepramenily ani v dávnověku jen z abstrahování geometrických útvarů, ale objevovaly se nutně všude tam, kde se lidé ve své praktické činnosti museli vypořádávat s měřením či porovnáváním vzdáleností, obsahů, objemů, s vytyčováním směrů, s plány domů a měst, s opracováním větších soch, s problémy orientace apod.

Počátky počítání existovaly do značné míry jen na verbální úrovni číslovek, jejichž záznamy byly nejen primitivní, ale i pomíjivé (prsty, posouvání kamenů na počítadlech, vruby na kostech), takže se doklady o jejich prehistorickém vývoji jen obtížně shledávají. Naproti tomu se ke geometrickým úvahám pořizovaly primitivní náčrtky a záleželo jen na druhu použitého materiálu a způsobu jeho uložení, zda se takový doklad o počátcích geometrie zachoval dodnes.

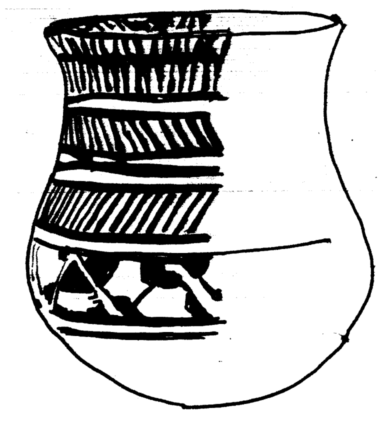
Doklady o geometrických znalostech

Nejstarší a nejčetnější doklady se uchovaly v geometrické ornamentice, kterou lidé zdobili trvanlivou keramiku. Je přitom zajímavé, jak obdobné motivy se zachovaly v různých oblastech světa.

Ostatních záznamů se dochovalo podstatně méně, a to nejen proto, že byly na materiálech podléhajících zkáze, ale speciálnějších geometrických náčrtů asi bylo podstatně méně.

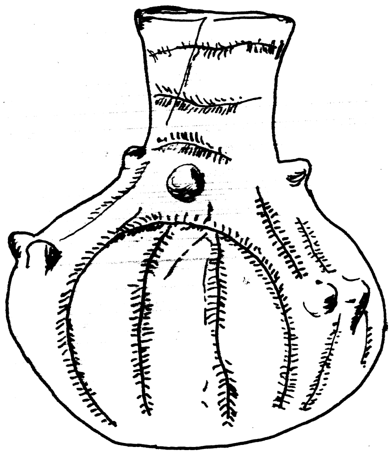
Nejstarší historické doklady geometrických úvah (spojených už s kvantitativními výpočty) nacházíme v egyptských papyrech z počátku 2. tisíciletí př. n. l. V terminologii i způsobu kreslení geometrických útvarů se tam výrazně projevuje zeměměřičská praxe spojená se zemědělstvím a celkovou ekonomikou egyptského státu. Ta také dávala další podněty pro rozvoj elementární geometrie.

Geometrická ornamentika na keramice (obr. 12–17) se udržovala od neolitu až po dobu železnou (halštatskou i laténskou), geometrické vzory nalézáme i na kovových nádobách z doby bronzové. Šlo převážně o řazení vpichů, šrafovaných pruhů, stylizaci lomených čar do tvaru trojúhelníků či kosočtverců, uplatňování spirál. Meandrové ornamenty se objevovaly převážně až v Řecku na keramice z doby bronzové.

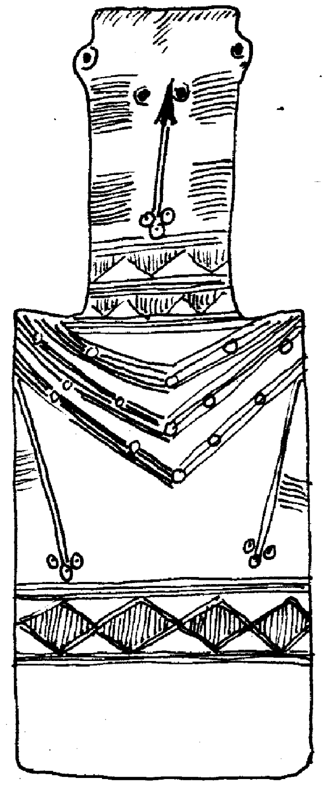


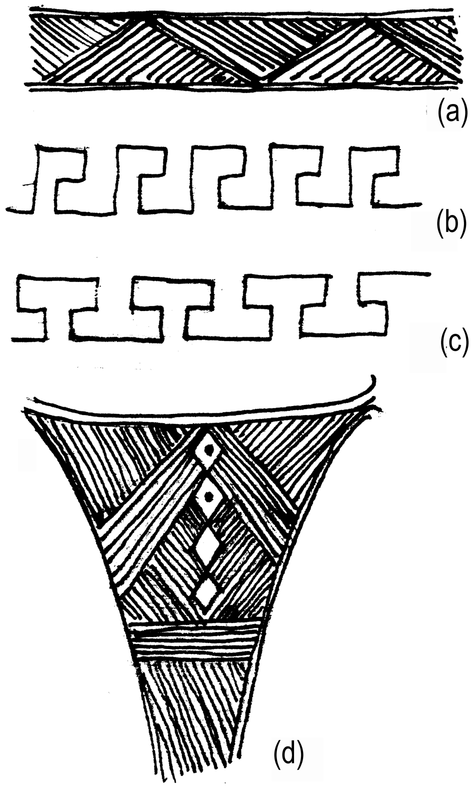
(12) Váza ze Samary na Tigridu

(Mezopotámie, 5. tisíciletí př. n. l.)



(13) Neolitická láhvovitá nádoba z kultovní jeskyně v Bavorsku, 3. tisíciletí př. n. l. Geometrický ornament vytvářený vpichy





(14) Ženský symbol z Kypru, Pálená hlína 2. tisíciletí př. n. l., geometrické ornamenty

(15) Geometrické motivy na středoevropské prehistorické keramice:
- *a) pásový trojúhelníkový motiv z lužické kultury (konec 2. tisíciletí př. n. l.),*
- *b) meandry v halštatské keramice (před r. 500 př. n. l.),*
- *c) meandry na keramice pozdního laténu (před poč. n. l.)*
- *d) nádoba z Domice (konec 4. tisíciletí př. n. l.).*

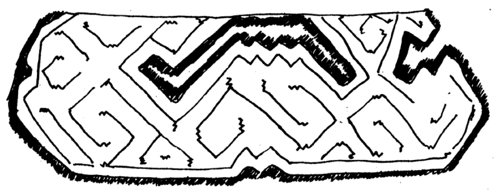
Na přelomu 3. a 2. tisíciletí př. n. l. se v geometrické ornamentice projevil kult Slunce; kromě symbolu kruhu se uplatnily symboly vírů a hvězdic, kde pravidelnost v rozmístění ramen víru či paprsků hvězdice naznačuje vědomou snahu o symetrii a o rozdělení „plného úhlu“ na zvolený počet shodných částí. Podněty pro úvahy o symetrii, shodnosti a rovnoběžkách mohly mít svůj základ i v opakovaných motivech pruhového zdobení keramiky.

Nesmírně zajímavá je *urna z halštatské doby* nalezená nedaleko Šoproně (na západě Maďarska). Na obr. 19 je patrno, že na ní geometrická stylizace dosáhla vysokého stupně, např. jednotlivé postavy jsou vyjádřeny trojúhelníkovými schématy, která odpovídají trojúhelníkové kompozici spodního pásu. Geometricky stylizovaná je však charakteristika povolání prvých tří osob zleva, stavebníka s olovnicí v ruce, tkalce se stavem a hudebníka se strunným nástrojem. Navíc jsou podobné geometrické motivy řazeny do sebe tak, že mohly naznačovat úvahy o podobnosti trojúhelníků nebo porovnávání jejich obsahů. Vepisované trojúhelníky nebyly počítány (ve středu obrázku vidíme chybu v rytmu ornamentu), přesto bylo možné vyslovit přesnější soud o obsazích těchto trojúhelníků na základě pouhého přiřazování malých trojúhelníků obsažených ve dvou větších. Obdobné by se dalo říci o porovnávání množství vpichů vyplňujících další typy trojúhelníků; vyplňování jedněch obrazců jinými drobnějšími útvary vy-

(16) Japonská neolitická váza z 1. tisíciletí př. n. l. vpichovaný geometrický ornament
(17) Řecká váza geometrického slohu z 9.–8. st. př. n. l.

tvářelo určitá měřítka, pomocí nichž je bylo možné porovnávat. Naše úvahy však předpokládají, že tvůrce urny uplatňoval kromě uměleckého formalismu svého vkusu i geometrické úvahy, a to nemůžeme ani vyloučit, ani doložit.

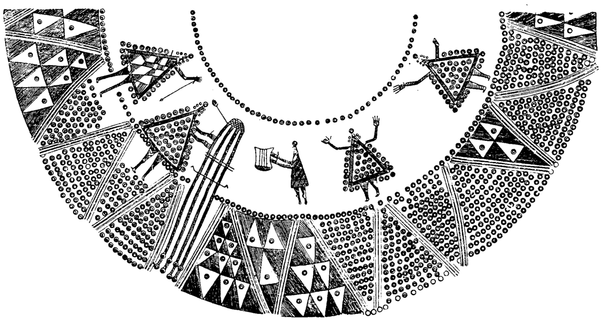
Stylizované geometrické figury, které byly nalezeny na čínské keramice z 2. tisíciletí př. n. l. a stejně jako na šoproňských nálezech z 6. stol. př. n. l., mohou jen podtrhnout, že povědomí o některých geometrických tvarech bylo velmi silné a že od něho byl jen nevelký krok k hledání dalších vlastností už abstraktních geometrických obrazců.



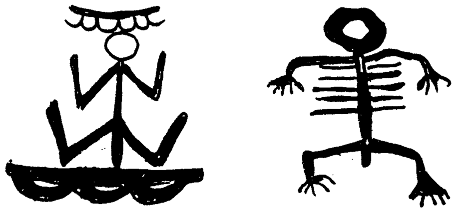
(18) Opakovaný motiv lomených čar na hliněné míse z Peru (6. stol. př. n. l.)

Praktické zeměměření patřilo mezi důležité činnosti, ze kterých pramenily geometrické pojmy a vztahy. Závažný byl především pojem vzdálenosti a délky; přitom nelze vyloučit už počáteční odlišování těchto pojmů. Zde se můžeme opírat jen o nepřímá svědectví, z nichž plyne, že bezprostředními délkovými mírami byly palec (= šířka prstu), dlaň (= asi 4 palce), píď (byla dvojí: vzdálenost konce palce od co nejvíce oddáleného konce ukazováčku nebo prostředníku), loket, sáh (vzdálenost konců obou rukou v rozpažení) nebo půlsáh. Tyto míry se alespoň udržely u různých kmenů stojících na nízké úrovni kulturního vývoje ještě v 19. století a odpovídají i systémům měr v Evropě před zavedením metrické soustavy. Ostatně i ve starém Egyptě byl tento systém uplatňován:
1 měřický provazec = 100 loktů, 1 loket (cca 52,3 cm) = 7 dlaní, 1 dlaň = 4 palce, (tedy 1 egyptský palec = 1,8 cm).

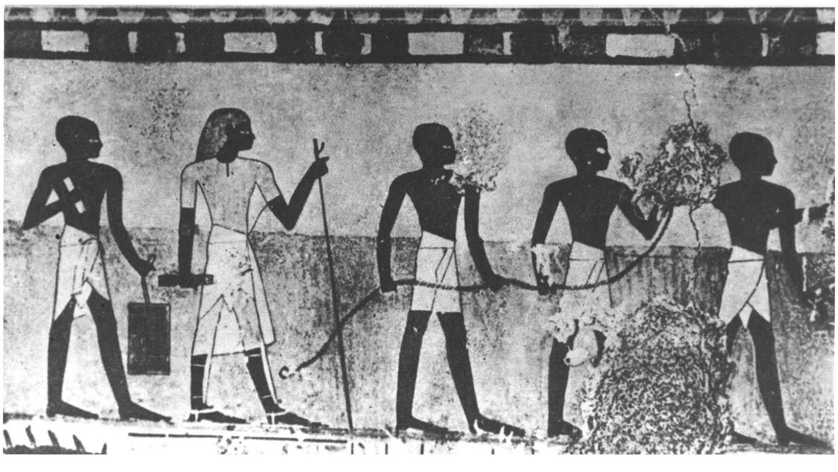
Obdobná soustava se základem v palcích a loktech existovala i v Mezopotámii.



(19) Výzdoba urny z okolí Šoproně z doby halštatské (6. st. př. n. l.)



(20) Geometrická stylizace postav
(čínská keramika z doby kolem 2000 př. n. l.)



(21) Skupina egyptských zeměměřičů vybavená měřicí holí, provazci a též tabulkou k záznamům

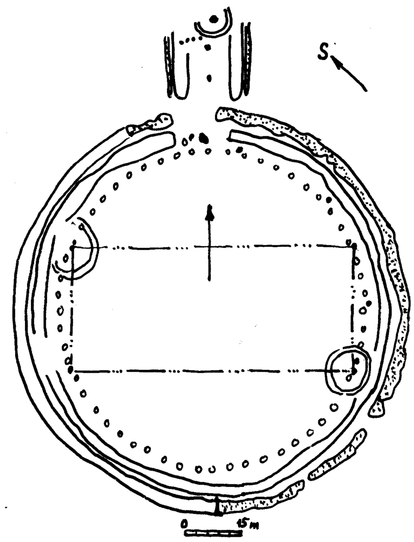
Dosud připomínané jednotky měr byly navzájem převoditelné a sloužily k měření „krátkých délek“. Delší vzdálenosti se na tyto jednotky nepřeváděly, vyjadřovaly se pomocí jednotek jako „slyšitelnost lidského hlasu“, „denní pochod zdravého muže“. V oblastech s řídkým osídlením byla často doložena odpověď na otázku, jak daleko je k nejbližšímu osídlenému místu, vyjádřená slovem „spánek“ opakovaným se zdvíhanými prsty. Počet prstů tedy znamenal počet denních pochodů přerušených spánkem; tento způsob udávání vzdáleností byl zjištěn na různých místech zeměkoule, např. v Jižní Americe a na Nové Guineji. Ještě před sto lety vyjadřovali Mongolové velké vzdálenosti počtem koňských či velbloudích pochodů, a to s dodatkem „když se jede dobře“ nebo „když se jede pomalu“, což zřejmě souviselo s pochodem po rovině či v horách.

Zajímavý příklad měření hloubky moře — nezbytné pro rybolovné sítě — byl zjištěn ještě na poč. 20. stol. u rybářů na ostrově Vuatanu. Na pobřeží vymezili úseky, které byly dlouhé 1150 m, 1300 m, 1500 m; při hlubinném rybolovu používali sítě, které měly tyto délky (stejné hloubky jakou uvádějí dnešní námořní mapy pro hloubku jejich místa lovu). Je pochopitelné, že k měření se používaly provazce; tím se dosahovalo převoditelnosti měr pro „krátké délky“ a měr pro „značné vzdálenosti“. Tato metodika byla asi rozšířena i v prehistorické době na různých místech.

Míry byly důležitým pojmem pro rozvoj geometrických úvah, protože do nich vnášely kvantitativní hledisko, ovšem za předpokladu už vyspělé soustavy třeba jen neverbální numerace. Opakované proměřování společnou jednotkou vyžadovalo záznam počtu jednotek obsažených v měřeném útvaru, a ten mohl být realizován třeba vruby na vrubovkách, jak jsme poznali v předchozích odstavcích.

Zeměpisná orientace bezesporu souvisí s pradávným kultem Slunce a s poznáváním jeho pohybu po nebeské klenbě během dne i celého roku. Pohyb Slunce byl spojen s periodickými proměnami klimatu ovlivňujícími zemědělské práce a jejich důsledky, na nichž byl neolitický člověk životně závislý. Proto bylo Slunce obklopeno mystikou, zbožňováno všude na zeměkouli; na celém světě je doložena orientace rituálních staveb a hrobek podle čtyř světových stran. Určování severojižního a východozápadního směru mohlo přispět i k fixaci pravého úhlu a k pravoúhelníkovým půdorysům staveb. Se změnami ve výšce slunečního zenitu (a tedy i změn místa východu Slunce vůči fixovaným útvarům na horizontu) během roku souviselo i měření času a to jak denního tak ročního.

I zde můžeme čerpat ze znalostí staveb těch kmenů, které v době kontaktu s naší kulturou byly ještě na nízkém stupni svého vývoje. Na Madagaskaru se dochovala kultovní chýše, která nejen že je orientována hlavním směrem půdorysu severojižně, jediný vchod má od západu, ale na stěnách jsou symetricky podle středu chýše označena místa, kam směřují paprsky Slunce v prvních dnech nových měsíců. Na ostrovech Fidži jsou obdélníková rituální místa ohraničená vzpřímeně stojícími kameny, s delší stranou 42 m dlouhou v severojižním směru a s východozápadní o poloviční délce. Obdobný, ale rozměrově takřka dvojnásobný obdélník je základem kruhovitého systému kamenů v anglickém Stonehenge, snad jen s tím rozdílem, že jeho kratší strany míří k východu Slunce v době letního slunovratu. Zde je také patrno, jak

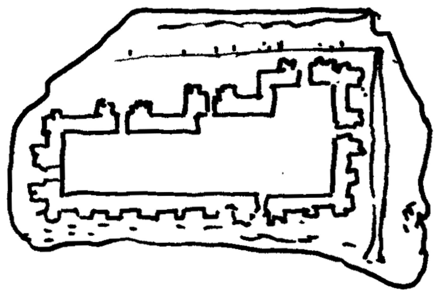


(22) Půdorys komplexu Stonehenge v jižní Anglii (z doby po r. 1900 př. n. l.). Zřetelně je vytyčen základní obdélník a dělení kruhu 56 kameny.

uspořádání těchto rituálních míst vedlo i k dělení kružnice na stejné části, a samozřejmě i k řadě astronomických poznatků. Připomeňme si i prostorové zaměření egyptských pyramid (stavěných kolem r. 2000 př. n. l.), které se jen ve zlomcích stupně odlišuje od severojižního a východozápadního směru. Egyptští zeměměřiči („napínači lan“, jak je nazval Herodotos) vytyčovali půdorysy chrámů, přitom stanovení hlavních bodů bylo právem králů. Existují vyobrazení, jak tohoto práva využívali.

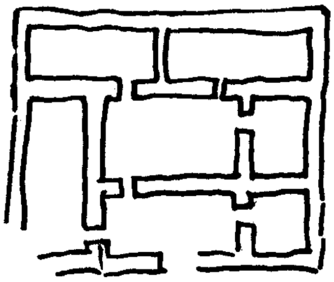
Stavební problémy a geometrie spolu úzce souvisely; vytyčování staveb a stavební konstrukce předpokládaly už ve 3. tisíciletí př. n. l. značné praktické zkušenosti, ale také určitou předběžnou přípravu — projekt či situační náčrt, na kterém se řešila dispozice stavby dříve, než se začalo stavět. Takové situační náčrty se dochovaly, a to nejen k jednotlivým stavbám, ale k větším aglomeracím.

Půdorysy budov byly zakreslovány již na konci 3. tisíciletí. Jeden s mezopotámských panovníků *Gudea* (2050–2022 př. n. l.) dal vybudovat řadu staveb; na jedné ze svých soch je zobrazen s přesným nákresem základů *Ningirsovy svatyně* (obr.22)



(22) Plán půdorysu svatyně boha Ningirsu (kolem r. 2000 př. n. l.) Na pravé straně etalon Gudeova lokte.

Obdobně vypadá půdorys domu v *Džocha-Umma* také z doby kolem r. 2000 př. n. l. Babyloňané zpravidla nekreslili plány v měřítku, ale načrtli skicu a k ní připsali příslušné míry nezbytné pro technické zvládnutí stavby.

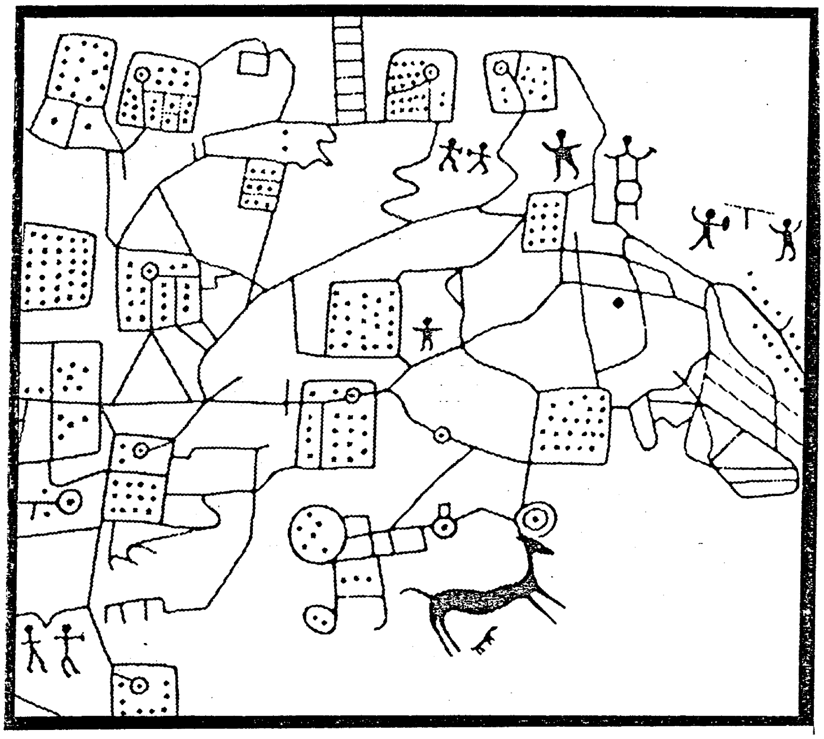


(24) Náčrt základů domu v Džocha-Umma (kolem r. 2000 př. n. l.), v plánu uvedené rozměry nejsou reprodukcí zachyceny.

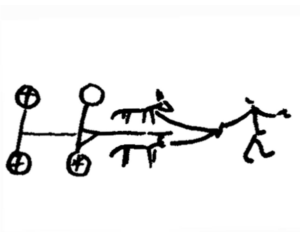
Ze 13. století př. n. l. pochází situační náčrt nubijských zlatých dolů. Král *Sethos* chtěl jejich stavbu dokončit, a proto dal vypracovat projekt, který zahrnoval zejména studnu (viz černý čtvereček takřka ve středu obr. 25). Na náčrtu je zajímavé, že obsahuje i horský profil, zatímco štoly jsou zobrazeny v půdoryse.

Při technickém provádění staveb — jak alespoň ukazují nálezy z ostrova Phile — se nejprve vybudovala vodorovná dlažba a do ní se vyryl přesný půdorys chrámu, který se stal základem pro další technický postup. Tato metoda připomíná kolmé promítání na jednu průmětnu.

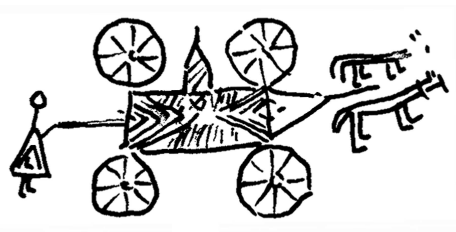
V egyptském stavitelství se setkáváme i se snahou o vyjádření prostorových (trojrozměrných) tvarů v dvojrozměrném obraze. Používalo se kombinace několika pohledů, hlavní situace byla podána v půdorysu a dokreslující podrobnosti v bokorysu či nárysu. Jeden známý obrázek ukazuje vodní nádrž obklopenou osobami a stromy; stromy jsou zobrazeny tak, že obrazy stromů připomínají sklopené kolmé průměty pohledů ze středu bazénu směrem k jeho stranám, stromy v rozích jsou zobrazeny na úhlopříčce (!!). Jedinou výjimku tvoří lidské postavy, které jsou zobrazeny v běžném egyptském schématu (s čelně postavenými trupy, nakročené stranou a s profilem obličeje zobrazeným na tutéž stranu), na celém obraze mají vždy nohy „dole“, lhostejno zda tam jsou znázorněny koruny stromů; a tedy hlavy postav někde směřují ke kořenům stromů. Taková snaha o zobrazení prostorové situace nebyla ojedinělá, jak dokazují dva nezávislé náčrty povozů se zapřaženými koňmi a vozkou pocházející z 6. stol. př. n. l. ze středoevropské oblasti (obr. 26).



(25) Situační náčrt nubijských zlatých dolů (13. století př. n. l. — projekt krále Sethose)



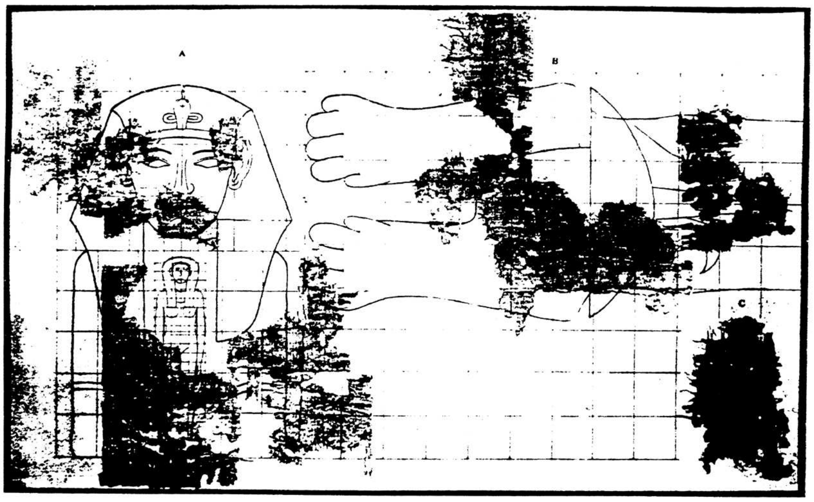
(a)



(b)

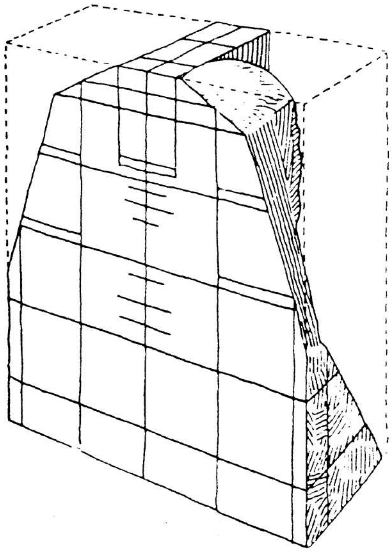
(26) Vyobrazení vozů s tažnými zvířaty a kočím (výkresy ze 6. stol. př. n. l. s týmž principem zobrazování)
a) z bývalého Pruska,   b) z okolí Šoproně

V egyptském sochařství však se pro hrubé opracování soch využívalo kromě kolmého průmětu na vodorovnou rovinu též kolmých průmětů do svislých rovin zachycujících hlavní tvary předmětů (nárys, bokorys nebo i ortografie zadní partie sochy). Dochoval se dvojí pohled na sfingu na jednom z berlínských papyrů (obr. 27), který bezesporu mohl být pomůckou pro tesání sochy, Někteří autoři soudí, že se na kamenný kvádr namalovaly pomocí čtvercových sítí dva bokorysy, půdorys a dva nárysy; hmota kvádrů se nejprve odebírala podle bokorysů. Protože tím zmizel přední i zadní nárys, nahradily je rámy s napjatými provazci, pomocí kterých byla barevně označena místa odpovídající bodům nárysu; hmota se pak mohla odebírat v tomto směru. Dochovaly se práce z dílny v *Tel-Amarnu* (1375–1350 př. n. l.), ale též nedokončená lví hlava (obr. 28a) z konce 2. stol. př. n. l. a skica propracování královské lebky (obr. 28b) z 8. až 2. stol. př. n. l.

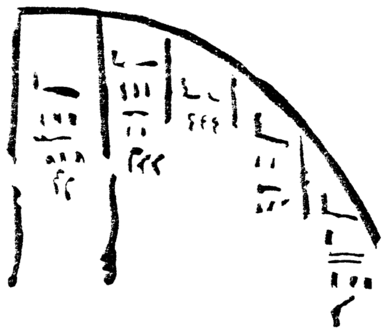


(27) Berlínský papyrus s kolmou projekcí přední a zadní partie sfingy ve čtvercové síti (z doby před poč. n. l.)

Tyto metody se prolínaly celým vývojem Egypta, skrývaly v sobě jednak některé postupy pozdějšího kamenořezu, jednak jakési intuitivní využívání souřadnicové metody (při určování polohy bodů ve čtvercových sítích).

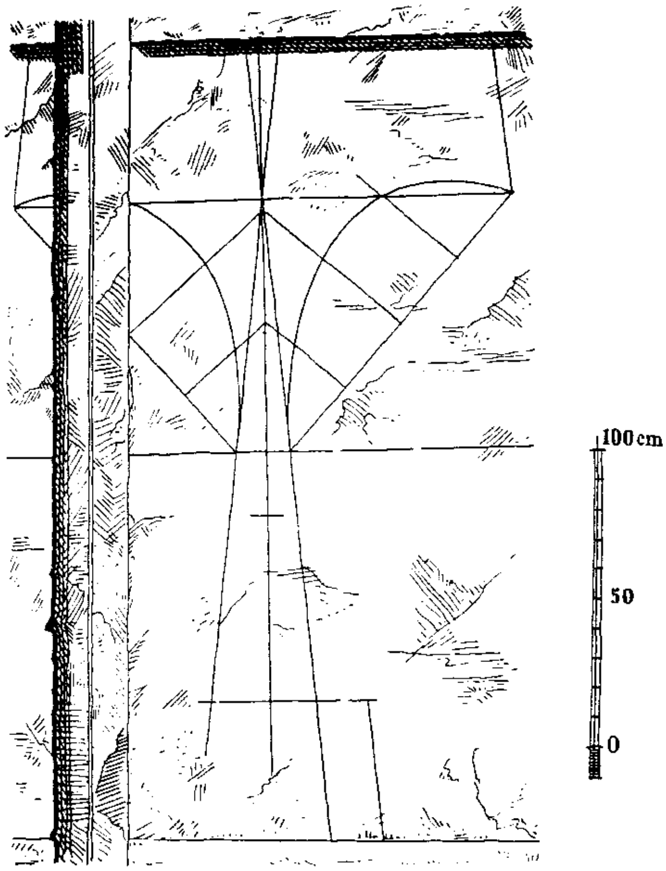


(28a) *(28b)*



(29) Souřadnicové vyjádření oblouku; naznačeny vzdálenosti svislic a jejich výšky

Velmi úzce s těmito praktickými geometrickými postupy souvisejí i některé konstrukční náčrty obtížnějších technických prvků, které udávají pro aspoň několik důležitých bodů jejich vzájemné vzdálenosti a dále jejich vzdálenosti od vodorovné roviny. Podobné je to i na rysu římsy pylonu vytesaného do kamene při stavbě chrámu v Edfu (kolem r. 250 př. n. l.), kde jsou graficky vyznačeny vzdálenosti několika bodů oblouku od jeho tětivy, což opět ulehčovalo a zpřesňovalo práci při tesání do kamene. Kvádry, ze kterých se odtesávalo, mohly být naznačeny vodorovnými čarami (obr. 30).

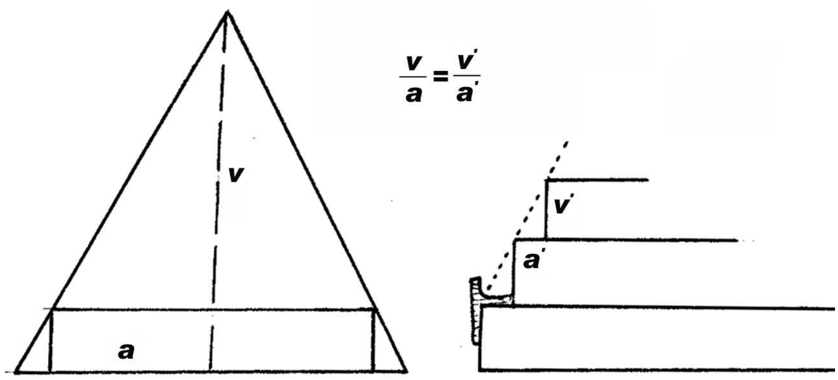


(30) Nákres pylonu v kamenné ploše střechy chrámu v Edfu (kolem r. 250 př. n. l.), náznak konstrukce oblouku římsy.

Na dokladech popisovaných v tomto odstavci je podstatné to, že ukazují vědomé využívání dvojrozměrného rysu pro technické konstrukce v trojrozměrném prostoru. Jako nezbytné se ukazovalo postupné odměřování jednotlivých bodů od určitého pevného „základu“; nejjednodušší se zdály „svislé vzdálenosti“, které mohly být odměřovány na olovnici.

Geometrie a pyramidy

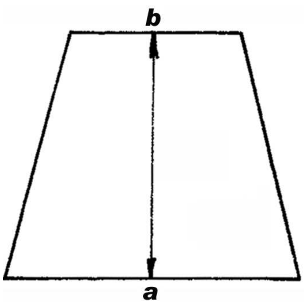
Neobyčejné monumentální stavby – egyptské pyramidy vyžadovaly i spojení znalostí z několika oborů: astronomie – pro přesnou severojižní orientaci stavby; transportu – pro dovoz potřebného množství stavebního materiálu značných rozměrů ze vzdálených oblastí a jeho umístění v tělese pyramidy; stavitelství – pro usazení jednotlivých vrstev opracovaných, „normalizovaných“ kamenů tak, aby výsledek vytvořil těleso, jehož *stěny budou mít konstantní sklon a dosáhnou předem dané výšky.* Příklad 36 v Rhindově papyru ukazuje, že zde už se musel stavebník opírat o znalost podobnosti pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách daných na jedné straně výškou pyramidy a polovinou hrany její podstavy, a na druhé straně výškou vrstvy kamene a vzdáleností paty následující vrstvy od hrany vrstvy předcházející (viz obr. 31)



(31)

Vzdálenost hrany od paty následující vrstvy se dařilo udržet pomocí tzv. ***sqd*** což v překladu znamená *„to s čím se staví“* a hieroglyfická podoba tohoto výrazu  je dána znakem, který se velmi podobá v obr. 31 načrtnuté pomůcce.

Egyptský počtář (Moskevský papyrus příklad 14) také používá v konkrétních číslech správný *vzorec pro objem komolé pyramidy.* Jestliže hrany jejích podstav (obr. 32) jsou $a = 4$, $b = 2$ a výškový rozdíl obou podstav je $v = 6$, pak pro výpočet objemu dává následující předpis:

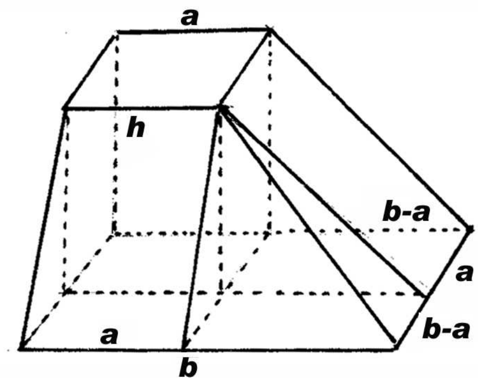


(32)

Počítej s těmi čtyřmi tak, abys dostal čtverec. Vyjde 16. Zdvojnásob 4. Vyjde 8. Vypočítej čtverec oněch 2. Vyjdou 4.
Sečti těchto 16 a 8 a 4. Vyjde 28. Vypočítej $\frac{1}{3}$ z 6. Vychází 2. Vypočti 28 krát 2. Vyjde 56.
Hle je to 56.
Nalezl jsi správně.

$16 + 8 + 4 = 28$, $\frac{1}{3}$ z $6 = 2$, $28 \times 2 = 56$
$(a^2 + ab + b^2) \times \frac{1}{3}v$ což je objem komolé pyramidy.

Není jasné jak k tomuto správnému vzorci dospěl. Je možné, že si pyramidu rozdělil jako na obr. 33:



(33)

Zemědělství a geometrie spolu souvisely ve všech říších, které vznikly na velkých řekách; zemědělství se tam stalo jedním z hlavních zdrojů obživy, vedlo k usedlému způsobu života a k růstu kulturní úrovně obyvatelstva.

Ve starém Egyptě periodické zátopy zúrodňovaly pole, ale smazávaly meze; proto bylo nutno vždy znovu pole vyměřovat, přidělovat rolníkům a na základě výměry odhadovat množství osiva i výnosu po sklizni. Po dlouhou dobu byly jednotky objemové a jednotky výměry (plošného obsahu) navzájem vázány; například korec a měřice byly jednotky pro objem zrní vysetého na určitou výměru pole, proto označovaly množství obilí i výměru pozemků (tento jev se udržoval od dob nejstarších zemědělských států až donedávna).

Egyptské zemědělství však přispělo i ke vzniku první geometrické terminologie, která se sice nepřenesla do dalšího vývoje, ale jasně svědčí o svém původu z praxe. Obrazec byl nazýván „pole“, pravoúhelník „čtyřrohé pole“, kruh „oblé pole“, trojúhelník „zašpičatělé pole“, lichoběžník „odseknuté pole“. Představíme-li si tvar údolí klesajících k Nilu, shledáme, že zaplavené území v nich mělo tvar „podlouhlých trojúhelníků“, které se při rozdělování rozpadly na „trojúhelníky“, řadu „lichoběžníků“ až posléze téměř „pravoúhelníků“.

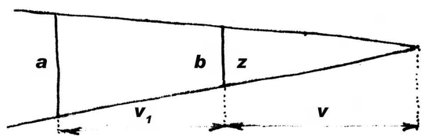
Základním tvarem „pole“ byl obdélník, pro výpočet jeho obsahu byl v papyrech nalezen vzorec (součin „délky“ a „šířky“). Odvození vzorce mohlo vycházet z tzv. pruhové míry, zvané též „polní loket“, která vycházela z pruhu zorané půdy. Počet těchto vyoraných pruhů (polních loktů) se násobil délkou pruhu, součin dával dosti přesný odhad pro stanovení množství zasévaného obilí.

Trojúhelník, který vznikal na konci údolí, kam až zasahovala voda zaplavující údolí (čili na *hranici* záplav), byl většinou rovnoramenný; pro něj nalézáme v *Moskevském papyru* (úloha 4) a v *Rhindově papyru* (úloha 51) termíny „vtok“ (pro základnu) a „hranice“ (pro výšku jako vzdálenost místa, kam až od „vtoku“ zasahovala voda). Obsah trojúhelníka byl pak dán výrazem

$$\text{polovina } \textit{vtoku} \times \textit{hranice};$$

trojúhelník byl tak vlastně proměňován na obdélník.

Obdobně se postupovalo s rovnoramenným lichoběžníkem (obr. 34). I tam byl „vtok“ (a), „odřez“ (b) a „hranice“ (v_1).



(34) Nákres polí v zaplavovaném území Nilu. S dnešní symbolikou pro velikosti úseček.

V 52. úloze Rhindova papyru se říká, že *vtok a odřez se sečtou, součet se dělí na polovinu, aby se to dodělalo na obdélník a konečně se násobí hranicí,* tedy

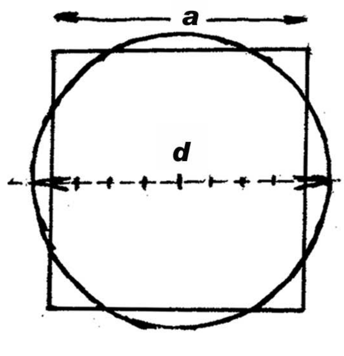
$$[(a+b)/2)] \times v_1$$

Je zajímavé, že jen v jednom pramenu (darovací listině svatyně v Edfu z 1.–2. stol. př. n. l.) se setkáváme s jiným útvarem než byly dosud zmíněné. I to nás může utvrdit v tom, že praktické výpočty vedly k prvním správným geometrickým pravidlům. Ve zmíněné listině je asi 150 příkladů na výpočet obsahů rovinných obrazců; pro obecné čtyřúhelníky o stranách s velikostmi a, b, c, d se uplatňuje přibližný výpočet

$$(a+c)/2 \times (b+d)/2$$

který dává přesný výsledek jen pro pravoúhelníky. Na základě úvahy, že trojúhelník lze považovat za čtyřúhelník, který má jednu stranu nulovou, je týž vzorec uplatněn i pro výpočet obsahu trojúhelníků. Egyptská geometrie přinesla i řadu dalších zajímavých výsledků.

Zcela mimo praktické úlohy se v egyptské geometrii (Rhindův papyrus , příklad 50) objevuje např. pokus o aproximaci obsahu plochy kruhu čtvercem. Velmi dobré přibližné vyjádření kde nadto i naznačený poměr $\frac{a}{d}$ mezi stranou čtverce a a průměrem kruhu d je dán jednoduchým zlomkem $\frac{8}{9}$ (obr. 35).



(35)

A tedy platí, že obsah čtverce je

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 \approx \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \text{ a } \pi \approx 3,16049.$$

Do Egypta cestoval v rámci svých obchodních zájmů i miletský kupec Thales, který byl o 80 let starší Pythagora.

Thales (* 625? Miletos, † 547?)

Narodil se v Milétu, který byl velmi bohatým obchodním centrem v maloasijské Iónii. Živil se zprvu jako kupec a byl neobyčejně úspěšný — traduje se (Aristoteles ve 4. st. p. n. l.), že ovládl obchod s olejem jak v Milétu tak na ostrově Chiu. Se svými obchody navštívil Egypt a snad i Krétu a Asii. V pozdější době se věnoval veřejným záležitostem a v poslední etapě života ho zajímala stereometrie, matematika a filozofie. V Milétu založil ionskou školu.

Jeho žákem a nástupcem v ní byl Anaximandros. Předpověděl zatmění Slunce v r. 585 p. n. l. V geometrii je mu připisována formulace nejjednodušších planimetrických pouček (kruh je průměrem dělen na dvě shodné poloviny; úhly u základny rovnoramenného trojúhelníka jsou stejné; protnou-li se dvě přímky, pak jejich protilehlé vrcholové úhly jsou shodné; úhel vepsaný do polokruhu je pravý*; strany podobných trojúhelníků jsou úměrné; dva trojůhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou úhlech a straně).

Připisuje se mu, že byl prvý, kdo tyto jednoduché věty dokázal a tím zavedl do geometrie logický důkaz.

Připisuje se mu i prvé měření výšky egyptských pyramid na základě podobnosti trojúhelníků. Stejný princip měl užít i při konstrukci dálkoměru umístěného nad milétským přístavem. Dálkoměr mohl pomoci odhadnout dobu příjezdu obchodních lodí do přístavu a tak připravit vše pro očekávaná obchodní jednání.

Závěrem můžeme shrnout: geometrické tvary, vztahy mezi geometrickými objekty, vlastnosti geometrických útvarů i otázky jejich „proměňování“ vyrůstaly z nejrůznějších praktických prací a činností lidí. Mnohdy tyto tradiční postupy přetrvávaly dlouho až téměř do současnosti a pomáhaly odhadnout zrod geometrie v době, ze které nemáme přímé doklady.

V žádném z popisovaných příkladů bychom asi nevystopovali geometrickou teorii, ale vždy jsme se v nich setkali s různým stupněm abstrakce, který tvořil základ obecnějších postupů, i když terminologie zůstávala hodně konkrétní. Některé ideje však naznačovaly, jak mohly konkrétní praktické postupy přerůstat do nosných metod geometrie.

Thales, který načerpal v Egyptě mnoho zkušeností v praktické geometrii, se stal pak prvým matematikem, který jednoduché geometrické poznatky logicky dokázal. Tím se stal významným podněcovatelem dalšího vývoje geometrie v Řecku.

* Tato „Thaletova věta“ je mu připisována až historičkou 1. st. n. l. Pamfilou a vzhledem k tomu, že žádná z dřívějších autorit se o tom nezmiňuje, je otázka, zda tuto větu skutečně formuloval.

Literatura

[1] L. Borchardt: *Altägyptische Werkzeichnungen.* In: Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde, 1896.

[2] L. Borchardt: *Sphinxzeichnung eines ägyptischen Bildhauers.* In: Amtliche Berichte aus den königlichen Kunstsammlungen, Vol. 39, (1917–18).

[3] H. Kuhn: *Kunst und Kultur der Vorzeit Europas.* Berlin-Leipzig 1929.

[3] E. Unger: *Ancient Babylonian maps and plans.* In: Antiquity, Vol. IX, 1935.

[4] *Umění a řemesla starého Egypta.* Praha 1914.

[5] Glanville: *Workingplan for a shrine.* In: Journal of Egyptian Archeologie XVI (1930).

[6] G. S. Hawkins: *Stonehenge decoded.* London 1966; ruský překlad: Dž. Chokins, Dž. Uajt: Razgadka tajny Stounechendža, Moskva 1973.

[7] F. Kadeřávek: *Geometrie a umění v dobách minulých.* Praha 1935.

5. Antická věda

Úvod

Období antické civilizace se rozvíjelo více než tisíc let od 8. století př. n. l. až do konce 5. století n. l. Ve svém celku tvořilo neobyčejně svébytný od předchozího a následujícího vývoje lidské společnosti se odlišující celek, stejně jako svérázný i vůči sousedním kulturám s ním paralelních. Celý tento jev umožnil rozvoj neobyčejně vyspělé kultury — v níž věda zaujímala významné postavení — která zapůsobila na kulturní rozvoj lidstva nejen bezprostředně, ale působí v mnoha ohledech trvale do současnosti.

Nelze přitom říci, že by toto období tisíciletého vývoje tvořilo vnitřně jednotný celek. Naopak v celém vývoji lze spatřovat značnou vnitřní dynamiku, různé kulminační vrcholy i teritoriální rozlehlost. Kulturní protiklad např. Athén a Sparty v klasickém období, úloha „velkého Řecka" s jeho maloasijskými či jihoitalskými osadami jsou dostatečně známy, stejně jako odlišnost klasického období helénistické doby, v níž se soustředila antická učenost do egyptské Alexandrie.

Na tomto místě se nebudeme zabývat společenskými a filozofickými souvislostmi vytváření antické vědy. Všimneme si několika otázek, souvisejících s antickou vědou, jejím vznikem, charakterem a vývojem už proto, že dosavadní literatura není ve svých názorech na tuto problematiku zcela jednotná a ne všechny jevy, charakterizující antickou vědu, oceňuje shodným způsobem. Přitom stejně jako vývoj antické společnosti tvoří svéráznou a dlouhodobě působící etapu ve vývoji lidstva, rovněž antická věda se svými odlišnostmi od předchozí úrovně lidského vědění, specifikami své soustavy a metodiky je jevem, který podstatně ovlivnil další rozvoj světového myšlení a vědy.

V této stati pochopitelně obtížně vyčerpáme všechny obecné rysy tohoto jevu, proto se budeme snažit zachytit alespoň některé znaky, o kterých se domníváme, že vymezují specifika antické vědy jako vývojového procesu a určují i dlouhodobý vliv jejího působení.

Pojem »antická věda«

Z důvodů, které jsme v úvodu jen naznačili, poutala antická věda k sobě v novější historiografii vědy vždy pozornost. V české či slovenské literatuře neexistuje příliš mnoho titulů věnovaných této problematice, proto zde připomeňme alespoň některé názory z některých klasických i novějších prací zahraničních autorů.

Nelze opomenout třeba prvý díl R. Tatonem redigovaných obsáhlých dějin vědy *Histoire générale des sciences* bohužel u nás málo dostupných. Obdobně je stále cenná příslušná část Bernalovy knihy *Věda v dějinách* a nevtíravou argumentací ukazující vytváření přírodovědecké tradice v antické vědě stále pozoruhodná kniha Farringtonova *Věda ve Starém Řecku*; ostatně s jejími hlavními tézemi se nutně musí vypořádat každý vážnější pokus o pohled na antickou vědu. Podobná je i práce Gordona Childa *Na prahu dějin*, která přináší ještě více argumentace ve prospěch technických a technologických předpokladů rozvoje antické vědy a na rozdíl od Farringtona končícího svůj výklad Aristotelem, si všímá též helénistického období antické vědy. V této souvislosti připomeňme i pokus S. V. Šuchardina o výklad významu technických revolucí ve vývoji společnosti, který se snaží uplatnit i na antický starověk. Protože většina vědecké argumentace v klasickém období je vedena v oblasti matematicko-fyzikálních věd, neopomeňme např. specializovanější práci O. Neugebauera, ale i zajímavý pokus o jiný přístup k pojetí „vědeckosti“ v antické matematice v A. G. Barabašovově knížce *Dialektika rozvoje matematických znalostí*, důležitý o to více, že napadá vžitou představu o „vzniku vědy“ v Řecku. V 80. letech 20. st. se pak objevilo několik rusky psaných prací, které mohou poskytnout další argumentaci k hlubšímu studiu problematiky antické vědy. Připomeňme zde především několik svazků z edice „Biblioteka vsemirnoj istorii jestěstvoznanija“. Piana P. Gajděnková se v knížce *Vývoj pojmu věda* snaží analyzovat vytváření prvých vědeckých programů od pythagorejců až po renesanci. V dalším svazku této knižnice (1982) je poslední stať věnovaná starověké vědě, jejíž autor I. D. Rožanskij se pak opírá o své předchozí vlastní tituly. V práci z roku 1979 se zabýval převážně starověkými kosmologickými představami, řeckou atomistikou a aristotelovskou přírodovědou. V roce 1980 pak vydal stručnou knížku věnovanou speciálně antické vědě. V ní si všímá ranné etapy řecké „vědy o přírodě“, pak rozebírá „klasickou vědu“ období Platona a Aristotela a další kapitoly pak věnuje „helénistické vědě“ a vědě římského období. Trochu rannější období pokrývá kniha F. Ch. Kessidiho *Od mýtu k logu* dostupná u nás ve slovenském překladu a věnovaná spíše otázkám vytváření filozofie a přírodovědy ve vztahu k předvědeckým mýtům a náboženským představám. Překlad knihy V. F. Asmuse *Antická filozofie* věnuje antické vědě značnou pozornost zejména tam, kde se jedná o koncepční filozofické otázky.

Z poněkud širšího záběru je antická věda posuzována ve dvou knihách z poslední doby. Vývoje řecké inteligence helénistické doby si všímá T. V. Blavatskaja. Snaží se polemizovat s některými okrajovými tvrzeními Farringtona, její argumentace však není příliš přesvědčivá. Přináší však materiál širší, ukazující, že je třeba mezi antické vzdělance vedle filozofů a přírodovědců zařazovat i učitele, lékaře, kněží, sochaře, výtvarníky, architekty, zeměměřiče apod. Zajcevova kniha shrnuje vývoj prvé etapy antické vědy do celkového kulturního převratu, k němuž od 8. do 5. st. př. n. l. došlo, a pokouší se vysvětlit na rozboru společenského vývoje „řecký zázrak“; posledních 30 stran věnuje „zrození vědy“. Výčet prací, ve kterém by bylo možné dále pokračovat, omezujeme jen na práce snadněji dostupné našemu čtenáři ve zdejších knihovnách. Ostatně tyto práce přinášejí samy o sobě dostatek bibliografických údajů pro další hlubší studium.

»Věda« a »antická věda«

V předchozím odstavci jsme připomněli, že i autoři současných prací o antickém vývoji považují „antickou vědu“ za prvý projev „vědy“ vůbec. Farrington cituje starší názor Arnolda Reymonda, že „*ve srovnání s empirickými a zlomkovitými vědomostmi, jež lidé pracně na Východě nasbírali za dlouhá staletí, je řecká věda pravým zázrakem. Zde lidská mysl poprvé pochopila, že lze stanovit omezený počet zásad a vyvodit z nich jistý počet pravd, které jsou jejich nutným následkem*“. Kirillin v roce 1986 s jistou opatrností (ale přece jen) opakuje obdobnou tezi, že *„činnost a výsledky starořeckých učenců poprvé v lidských dějinách začaly vyhovovat těm kritériím, která vymezují vědu“*. Nebudeme přinášet další doklady. Poznamenejme jen, že I. D. Rožanskij, i když připouští, že předchozí civilizace „měly vědu“, udává, že *„neměly vědu ve vlastním slova smyslu“*, čímž se vlastně dostává na platformu těch, kteří tvrdí, že *„skutečná“* věda vznikla až v antickém Řecku.

Bylo by asi vhodné tyto otázky alespoň trochu přiblížit. Zdá se, že se zde projevuje vliv dnešního stavu, charakteristik a forem vědecké práce. Nalezením některých znaků už v antice je pak proklamována myšlenková kontinuita a tím i zrod „dnešní vědy“.

Upozorněme na jiné řešení problematiky, jež se projevuje v citované práci Barabašovově, zaměřené k nejvíce rozpracované vědní oblasti starověku k matematice. Ve starověké matematice je taková situace, že nelze matematiku předhelénských civilizací přehlížet ani ji degradovat na „nevědeckou“ úroveň. Barabašov vychází při své analýze z úlohy matematiky v příslušné době v konkrétní společenské situaci. To mu umožňuje jinou charakterizaci této oblasti. Aby nalezl směry obecných tendencí vývoje matematiky, klade si otázky: Jaký byl mechanismus vzniku poznatků v příslušných etapách, jaké bylo společenské postavení lidí zabývajících se v dané době odborně matematikou, jaká byla kritéria správnosti užívaných matematických postupů a závazné normy ověřování této správnosti (což se nemusí vždy shodovat) a hlavně v jakém smyslu byla chápána integrita veškerého matematického vědění dané doby. Při svém oceňování předhelénského vývoje tak dospívá k jinému pohledu než ostatní historici antické vědy. Svým způsobem podporuje názory vyjádřené již dříve např. Neugebauerem: *„Je rozšířen názor, že v matematice starého Egypta a Mezopotámie se jen hromadil empirický materiál a že teprve v antickém Řecku se matematické poznatky přeměnily v soustavu propojených tvrzení. Přitom se pokládá za zcela samozřejmé, že jediný způsob uspořádání matematických poznatků, sjednocení matematického materiálu je způsob logického vyvozování jedněch tvrzení z druhých“*. Upozorňuje však, že *„lze naprosto oprávněně tvrdit, že předřecká matematika měla … způsob systematizace … jako prakticky orientovaná znalost“* a že díky specifickým společenským podmínkám byla matematika uchovávána *„jako ucelený vzdělávací systém“*. A dále pak zdůrazňuje, že *„přechod matematického vědění na teoretickou úroveň nebyl přechodem z konglomerátu separátních poznatků do teoretického systému, ale znamenal rozpad jednoho typu celistvosti a vznik jiného typu ucelené soustavy“*.

Tedy nejde o to, že v antice „teprve vzniká věda“, ale jde o to, co vlastně chápeme vědou. Zatímco prvý názor vidí ideál vědeckosti v deduktivním logicky budovaném systému, druhý si všímá celkové úlohy vědy ve společnosti a z toho vyplývajícího postavení, forem a konec konců i obsahu. Barabašov užívá termínů „praktická“ a „teoretická“ matematika, přičemž za předmět praktické matematiky považuje měřičské a srovnávací operace, ale již odpoutané od bezprostřední praktické činnosti. Přitom dogmaticko-předpisový způsob výkladu spolu s autoritativním potvrzením pravdivosti výsledku je mu výrazem celistvosti praktické matematiky té doby.

Za velmi důležitý impuls přechodu od „praktické“ matematiky k „teoretické“ považuje proces předávání znalostí — výuku — která si vyžádala takové uspořádání látky, které by bylo vhodné pro řešení, a tak opustila striktní praktickou potřebu řešení konkrétních příkladů a učivo se začalo členit do určitých logice podléhajících celků.

Podstatné je, že připouští společensko-historickou podmíněnost „vědeckosti“. A zdá se, že úvahy věnované matematice, bychom mohli užít i na celý vztah helénské a předhelénské vědy. Úloha určitého systému znalostí ve společnosti tak dává možnost postižení určité koncepce vědy (koncepce, která nakonec zahrnuje i ono užší pojetí vědy jako určitým způsobem uspořádaného a ověřovaného systému znalostí).

I když řada prací klade vznik vědy (a myslí tím převážně vznik vědy dnešního typu) do helénské doby, přece i zde se někteří badatelé snaží postihnout rozdíly mezi dnešní a tehdejší vědou. Ukažme to na myšlenkách jednoho z plodných historiků antické vědy Rožanského. Jeho úvahy vycházejí z charakterizování vědy jako:

(1) souboru znalostí
(2) činnosti nezbytné k získání nových znalostí produkované určitou kategorií lidí
(3) činnosti, která je schopná vlastního ocenění správnosti dosaženého výsledku
(4) činnosti mající k dispozici prostředky k uskutečňování badatelské práce; a to nejen matematické prostředky (přístroje, nástroje), ale i metodologické a technologické postupy
(5) činnosti mající možnost uchovávání existujících a získávaných informací

(6) způsobu racionálního objasňování jevů vnějšího světa
(7) systematického postupu při výzkumu a také systematického výkladu získaných poznatků

Rožanskij pak dochází k závěru, že *„řecká věda byla prvou, která měla všechny tyto znaky skutečné vědy“*. To, čemu se říká egyptská či babylonská věda, *„ještě nezasluhuje takovéhoto označení“ … „řecká věda — alespoň ve svých nejvyšších projevech — byla kvalitativně novou epochou, pro níž bylo poprvé možno užít termínu věda ve smyslu dnešního pojmosloví“*.

Přesto Rožanskij nalézá jeden rys, který odlišuje antickou vědu od „současné“: *„je to neexistence experimentální metody ve tvaru, v jakém ji vytvořili tvůrci novověké vědy … antická věda chápala význam zkušenostního poznání … Antičtí učenci uměli dobře pozorovat obklopující je přírodu … Ale experiment jako umělé zopakování přírodních jevů, při kterém se odstraňují vedlejší nepodstatné efekty a který má za svůj cíl potvrzení nebo odmítnutí toho či jiného teoretického předpokladu, takový experiment antika ještě neznala (!)“*. A dále se Rožanskij pokouší ze společenských podmínek vysoudit, proč antická věda nedospěla k experimentální metodě a příčinu vidí v odtržení antické vědy od techniky; antická věda (až na výjimky jako byl třeba Archimedes) neměla praktické výstupy.

Společenské podmínky rozvoje antické vědy a některé její charakteristické rysy

Technická revoluce a antická společnost

V prvé polovině prvého tisíciletí př. n. l. proběhla především v oblasti Řecka technická revoluce, která jak říká Šuchardin *„od základu změnila techniku a pracovní nástroje v celé materiální výrobě“*. Využití a zpracování železa a v důsledku toho i železné radlice, pracovní nástroje, železné zbraně ovlivnily celkovou ekonomicko-společenskou úroveň lidské civilizace. *„Železné pracovní nástroje měly značný vliv na výkonnost a vedly k novým technologickým procesům. Železné zbraně zvýšily efektivnost válek, které se staly hlavním zdrojem pro získávání výrobní síly — otroků“*. Tím byly vytvořeny podmínky pro výrobní revoluci, která — podle Šuchardina — se může za technické revoluce uskutečňovat jedině, jsou-li nastoleny nové výrobní vztahy. Tehdy na základě nových výrobních prostředků vzniká výrobní způsob vyznačující se novou dělbou práce, novým postavením výrobců a novými společenskými vztahy ve výrobě, novou sociální strukturou společnosti.

Postupné přerůstání technické revoluce v revoluci výrobní vedlo ke vzniku vyspělých otrokářských států. Řemeslo se oddělilo od zemědělství, které podstatně zvýšilo svoji produktivitu. Změnilo se postavení výrobců, otroctví se stalo podstatnou součástí společenské výroby. Řemeslo přestalo být doplňkem činnosti zemědělce a hrnčířství, tkalcovství, hornictví, metalurgie se stávaly samostatnými zaměstnáními znatelného množství obyvatelstva.

Vliv nových technologií, poznávání jejich možností i procesů značně ovlivnilo celkové společenské vědomí té doby. V těchto technických a společensko-ekonomických podmínkách je bezesporu důvod přechodu otrokářské formace od autoritativní despocie k otrokářské demokracii. Celý tento proces se projevil — jak se ostatně velmi podrobně snažil přiblížit už Farrington — i v přeměně struktury vědeckého myšlení a v jeho neobyčejném rozmachu. Zde jsou prameny rané antické vědy — nauky „o přírodě" (peri physeos). Nauka „o přírodě" je podstatně ovlivněna znalostí tehdejších výrobních technologií mezi předními mysliteli té doby. Vidíme to na představitelích milétské školy a jejich od mytologie už odpoutanému, přirozenému, přírodnímu, i když stále spekulativnímu, avšak o analýzu se známými technickými postupy se opírajícímu vysvětlování vzniku a obrazu světa. Rovněž konzervativní světonázorové spekulace pythagorejců postrádají nadpřirozené síly a v některých představách se nevyhýbají přirozeným a z technologií vyplývajícím modelům.

Tak lze říci, že technická revoluce projevující se v antické společnosti od 2. pol. 9. st. př. n. l. spolupůsobila v 8. až 6. st. př. n. l. na významné změny hospodářských, sociálních a politických poměrů, které se uskutečnily v řeckých městských státech nejprve zejména v oblasti koloniálních osad a daly od 6. st. př. n. l. podněty rozvoji kultury, filozofie i vědy. Protože v dalším vývoji se rozvoj techniky projevoval jen v oblastech málo spojených s vědou (stavebnictví, architektura, stavba lodí, válečná technika) a vědci svými výsledky jen okrajově zasahovali do vývoje techniky (Archimedes, Hérón), nedošlo zde v dalším vývoji k plodnému vzájemnému propojení vědy a techniky. Rozklad antické společnosti a stále silnější oddělování duševní a fyzické práce způsobily, že věda se ve svém celku zaměřovala do oblastí, které v dané době nemohly najít širšího společenského uplatnění.

Otrokářská demokracie a věda

Narůstání demokratických forem správy mezi svobodným obyvatelstvem v řeckých městech vedlo k posílení společenského života, vytváření vlastních politických sdružení vzájemně se snažících o prosazení vlastních koncepcí, a tím se nepřímo posilovala logická argumentace mluvčích i celkově se vyjasňovaly filozofické postoje a koncepce. Není ani divu, že některé spisy Platonovy a Aristotelovy jsou psány formou dialogů, kde se námitkami a diskusí ověřuje oprávněnost předloženého názoru. Tento způsob přijatý rozvíjející se vědou v polaritě prokazování správnosti ve vědě a ve společenském životě, dále krystalizoval a dostal svůj teoretický základ v Sokratových úvahách o definici a v Aristotelově logice uveřejněné v jeho *Analytikách*. Značný podnět v tomto směru znamenal i Platonův odklon od poznání založeného na smyslovém vnímání a jeho zdůrazňování myšlenkové analýzy pro poznání podstaty jevů.

Ve vědě se pak tento proud projevil významně až v helénistickém období v Eukleidových *Základech*, které však měly své metodické vzory už v 5. st. př. n. l.

Etapy rozvoje antické vědy

Téměř tisíciletý rozvoj antické vědy lze rozdělit do několika období:

Raná řecká věda zahrnuje vývoj od 6. st. př. n. l. do doby Sokratovy (tj. do 4. st. př. n. l.). Vyznačuje se vystoupením přírodních filozofů milétské školy a na Sicílii se rozvíjející pythagorejské školy. Zahrnuje i další myslitele: eleaty Parmenida, Zenona, Empedokla, atomistu Demokrita, lékaře Hippokratova okruhu a stoické myslitele počínaje Protagorem a konče Sokratem.

Farrington vědu tohoto období charakterizuje schematicky jako „způsob provádění". Z děl tohoto období se zachovaly však jen zlomky.

Klasické období řecké vědy zahrnuje dobu Platonovu (*428/7 př. n. l.) a Aristotelovu (†322 př. n. l.). Sem patří rovněž dílo Eudoxovo, Archytovo či Theaitetovo, ale též přímí pokračovatelé

Platonovi a Aristotelovi jako byli Spensippos, Xenokrates, Theofrastos, Eudémos aj., z nichž poslední působili v Platonově Akademii a Aristotelem založeném Lykeiu. Tyto dvě tehdy vzniklé instituce symbolizují přední vědecká, ale též pedagogická zařízení své doby s dlouhodobým vlivem na pozdější vývoj vědy. Na rozdíl od předsokratiků díla Platonova a Aristotelova se zachovala a v mnoha ohledech se stala normou pro vědeckou práci jak co do jejího rozsahu, tak co do metodiky. Věda se v Platonově duchu považuje za „způsob vědění“ a má dávat správnou odpověď na každou otázku. Správnost je prokazována dialogem vedeným podle pravidel, opírajících se o předem dané výchozí principy a logiku argumentace.

Helénistická věda rozvíjející se především v alexandrijském Múseu, založeném kolem r. 300 př. n. l. Zde působili v prvém období Eukleides, Eratosthenes, Apollonios a patří sem bezesporu syrakuský učenec Archimedes. Múseion se stalo vlastně přední vědeckou institucí a první, která plně zaměstnávala a platila vědce za výzkumnou práci a za její šíření. Zde se vytvořila i na svou dobu pozoruhodná sbírka rukopisných svitků. I když ve své činnosti Múseion pokračovalo až do 4. st. n. l., jeho význam v dalším období upadl.

Věda římského období se rozvíjí od prvého st. př. n. l. a zahrnuje i druhou skupinu alexandrijských učenců (Heron, Ptolemaios, Diofantos, Pappos, Hypatia), kteří ještě tvořili v tradici helénistické vědy, a pak římské praktiky a techniky jako byl třeba Vitruvius, Sextos Empeirikos, Galénos, Plinius aj. Toto období končí rozpuštěním athénské akademie v r. 529 n. l., což je doba, v níž umírá tvůrce jediné kompilace antické vědy, která se přímo přenesla do středověkého myšlení, Boethius.

Některé zvláštní rysy metodiky antické vědy

Antická věda se v některých svých postupech a rysech vymanila z dřívějších tradic vědeckého myšlení a pootevřela tak cestu dalšímu rozvoji racionálního přírodovědeckého výzkumu.

(a) Přírodně materialistické kosmologické spekulace

Již ve svém prvém období řecká věda začala odmítat mytologické kosmologické spekulace opírající se o existenci nadpřirozených kreativních sil. Na jejich místo pak stavěla spekulace, opírající se o bezprostřední zkušenosti technického charakteru či o pozorování přírodních jevů. Tak se vytvořily možnosti pro postupný vývoj těchto spekulací a jejich nahrazování „oprávněnějšími“ teoriemi přírodního charakteru a vůbec pro další systematičtější přírodovědecké bádání. Thaletova „voda jako prapůvod všeho“, Anaximandrovy hmotné živly sjednocené v apeironu, Anaximenova možnost proměny hmoty do různých forem atd., patří do tohoto trendu, který odmítl dogma stvořitele řídícího všechny procesy světa.

Jestliže v helénistickém období získala astronomie pozorováním a výpočty představu o reálných velikostech Země a jejích vzdálenostech od Slunce a Měsíce, je to způsobeno právě možnostmi přírodovědeckého zkoumání astronomických objektů zbavených mytologické nadpřirozenosti. A pythagorejské heliocentrické spekulace dostaly u Aristarcha v pol. 3. st. př. n. l. (i u babylonských hvězdářů o něco později) tvar astronomické hypotézy.

(b) Empirie

Pozorování, které bylo vždy jedním z prvých kroků systematické práce ve vědě, nabývá už v prvé fázi rozvoje antické vědy na intenzitě. Zkušenosti, získávané systematickým pozorováním, soustřeďováním pozorovaného materiálu, zkoumáním fyziologických pochodů a jejich průvodních jevů, komparace, pozorování přirozených a patologických jevů, hledání příčin jevů vivisekcí či pitvami zvířat, vytvořily předpoklady pro popisnou přírodovědu a systematizaci přírodních jevů. *„Nebyli jen pozorovateli přírody. Měli zbystřeny smysly, jejich pozornost byla usměrněna a volba pozorovaných jevů byla podmíněna znalostí jistého počtu výrobních technik. Novost jejich způsobu myšlení je vysvětlena odmítáním mystického nebo nadpřirozeného zásahu jen negativně. Kladný smysl si odvozovali z výrobních technik té doby“*, soudí Farrington.

(c) Experiment

Otázka experimentu v antické vědě je, jak se ukazuje, složitější. Rožanskij považuje nepřítomnost experimentu v antické vědě za odlišující prvek antické a moderní vědy. Farrington ale připomíná Boethiem tradovanou historku o pythagorejských experimentech (1) se zvukem různě těžkých kladiv při úderu na kovadlinu, (2) s výškou tónu monochordu při určitém napětí, délce a síle struny, (3) s rákosovými píšťalami, kterými zkoumali závislost výšky tónu a velikost intervalů na kvantitativních změnách délky znějících instrumentů. Tento příklad ukazuje, že si Řekové uměli připravit vědomý experiment. Přímý doklad pak máme od Empedokla, který experimentem s klepsydrou dokázal existenci vzduchu naplňujícího prostor a působícího silou. Přitom je k tomuto experimentu veden snahou po objasnění vztahu mezi vnější atmosférou a pohybem krve v živém organismu.

Rozhodně však nelze říci, že by se experiment stal závažnou metodou vědecké práce té doby.

Připomeňme ještě, že velká autorita starověku Platon od experimentů odrazoval argumentací nedůvěry ve smysly a tím mohl ovlivnit nejen své současníky, ale především historiky antiky. Ostatně výklad obsažený v Archimedově dopise Eratosthénovi (tzv. pojednání „O metodě“) ukazuje, že určitou formu experimentování dokonce jako heuristickou metodu v matematice neodmítal ani v helénistické době Archimedes.

(d) Systematický, deduktivně logický způsob výkladu

se začal projevovat v antické matematice už od 5. st. př. n. l. Byl vyvolán snahou po ověření možnosti logické dedukce a tím ověřování správnosti z určitých principů vyvozovaných závěrů. Postupně si vynutil přesné vymezení základních pojmů a postulátů a způsobil, že bylo poznáno co lze do daného základu, do dané oblasti zahrnout (vymezil její rozsah) a současně ověřil možnost a metody prokazování správnosti výsledků logickým rozvažováním. Tak třeba Eukleides vylučující na požadavek Aristotela z matematiky (volbou axiomatiky) pohyb, vyloučil z ní nadlouho všechny kinematické konstrukce, omezil se jen na konstrukce pomocí kružítka a pravítka a tím vlastně postavil antická konstruktivní řešení tří klasických matematických úloh (trisekce úhlu, zdvojení krychle a kvadratura kruhu) mimo matematiku.

Z matematiky se deduktivně logický způsob výkladu rozšířil do řady ostatních vědních oblastí a ne vždy oprávněně byl pokládán za vrchol vědecké přesnosti.

(e) Kritický přístup k naivnímu přijímání smyslového vnímání

Už v odstavci věnovaném experimentu jsme upozornili na Platonovy námitky, které se objevují v řadě jeho výroků, a ukazují na jeho nedůvěru k smyslovému vnímání. Platon však není vždy jejich úplným odpůrcem. V dialogu *Theaitetos* připouští, že smyslové vjemy jsou základem vědění, ale trvá na tom, že vnímání samo o sobě není věděním. Rozlišuje *vnímání* a rozumové zpracování vnímaného přemýšlením — *vědění.* Tak vlastně Platon poprvé analyzoval vztah smyslových vjemů a rozumu při procesu poznávání a přispěl tak k poznávání úlohy myšlení a myšlenkových abstrakcí, či modelů pro vytváření abstraktních vědeckých teorií. Tyto závěry, které se osvědčily zejména v rozvoji matematických teorií, se vynořovaly v dalších filozofických koncepcích.

— — — —

Rysy antické vědy, které jsme se zde snažili vyzdvihnout, zdaleka nevyčerpávají charakteristiku antické vědy, ale tvoří hlavní pozitiva, která přispěla v antice a zejména pak v moderní novodobé vědě k rozvoji vědeckého bádání.

Společenské uplatnění antické vědy

Jestliže jsme konstatovali, jak se rozvoj antické techniky a společnosti odrazil v rozvoji antické vědy, jen obtížně bychom hledali stopy toho, jak výsledky antické vědy ovlivnily život antické společnosti. Přes významné konkrétní výsledky i metodické postupy nestala se antická věda podstatnou součástí celkového společenského života řecké společnosti. Mnohé technické principy, opírající se o znalosti hydrostatiky a pneumatiky se uplatnily jen v kuriózních zařízeních, nikoliv však ve výrobních technologiích (snad s výjimkou odvodňování a zavlažování), kde bychom dnes jejich využití očekávali. Zřejmě zde vedle odtrženosti těchto dvou pólů řecké společnosti (vědy a výroby) hrály svou roli i ekonomické důvody laciné otrocké práce oproti drahému zhotovování a zavádění technických vynálezů. Účast vědy se však projevuje zřetelně v rozvoji kultury společnosti. Zde se uplatňují světonázorové představy, na nichž se antická věda podílela. A tak jako nemohla antická věda v této oblasti rozhodnout o oprávněnosti svých spekulací, tak se objevují paralelně představy ideově protichůdné. Podstatné je také to, že tyto představy se nestaly strnulými dogmaty, ale byly dále doplňovány a rozvíjeny či nahrazovány jinými. Věda zde pomáhala filozofii. Byla však rovněž zpětně filozofickými představami limitována. I zde byla jedna z příčin menší možnosti společenského působení antické vědy.

Krize antické společnosti byla provázena i krizí antické kultury a vědy. Převážně teoretická věda nenašla od konce helénistického období žádnou širší podporu, a praktické potřeby existence antické společnosti posledních století neposkytovaly žádných podnětných impulzů pro rozvoj vědeckého bádání.

Literatura

[1] L. Nový: *Hlavní problémy a východiska studia a výkladu vědy ve středověku.* In: Práce z dějin přírodních věd 26, Praha 1991, str. 16–25.

[2] L. Nový, J. Folta: *Věda jako společenský jev ve vědecké revoluci konce 19. a zač. 20. st.* In: Práce z dějin přírodních věd, Praha 1980, str. 387–416.

[4] R. Taton, ed.: *Histoire génerale des sciences, Tome I.* Paris 1961.

[5] John D. Bernal: *Věda v dějinách I.* Praha SNTL 1960.

[6] B. Farrington: *Věda ve starém Řecku.* Brno Rovnost 1950.

[7] G. V. Childe: *Na prahu dějin.* Praha Orbis 1966.

[8] S. V. Šuchardin: *Současná vědecko-technická revoluce.* Praha Orbis 1973, zejména str. 51 nn.

[9] O. Neugebauer: *Točnye nauki v drevnosti.* Moskva Nauka 1968.

[10] A. G. Barabašev: *Dialektika razvitija matěmatičeskogo znanija.* Moskva 1983.

[11] Piama P. Gajdenko: *Evolucija ponjatija nauki.* Moskva Nauka 1980.

[12] *Očerki istorii jestestvonaučnych znanij v drevnosti.* Moskva Nauka 1982, zejména str. 197–275.

[13] I. D. Rožanskij: *Razvitije jestestvoznanija v epochu antičnosti.* Moskva Nauka 1979.

[14] I. D. Rožanskij: *Antičnaja nauka.* Moskva Nauka 1980.

[15] F. Ch. Kessidi: *Od mýta k logu.* Pravda-Svoboda 1976.

[16] V. F. Asmus: *Antická filozofie.* Praha Svoboda 1986.

[17] T. V. Blavatskaja: *Iz istorii grečeskoj intelligencii ellinističeskogo vremeni.* Moskva Nauka 1983.

[18] A. I. Zajcev: *Kulturnyj perevorot v Drevnej Grecii.* Leningrad 1985, zejména str. 171–203.

[19] V. A. Kirillin: *Stranicy istorii nauki i techniki.* Moskva Nauka 1986, zde str. 17.

[20] J. Folta, O. Kowalski: *Stojí matematika na prahu revolučních přeměn? (Nad esejí A. G. Barabaševa).* In: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie XXX/1985, str. 158–172.

[21] N. Burbaki: *Očerki po istorii matematiki.* Moskva 1963.

[22] K. Michalowski: *Technika Grecka.* Warzsawa PWN 1959.

6. Počátky řecké matematiky
Krize koncepcí. Příprava východisek

Společenské předpoklady vytvoření matematických teorií

Období, v němž se rozvíjela řecká a helénistická matematika, zahrnuje téměř tisíciletí od 6. st. př. n. l. až do poč. 6. st. n. l., kdy východořímský císař Justinián (panoval 527–565) zrušil poslední výspu „pohanské“ vědy — athénskou akademii. Zakázal učit jakékoliv filozofii a do svého právního kodexu zařadil odstavec „*De maleficiis, mathematicis et caeteris similibus*“ (O zločincích, matematicích a jiných jim podobných), v němž je výslovně uvedeno, že *„zavrženíhodné umění matematické je zakázáno především“*. Tím vlastně právně potvrdil absurdní tézi hlásanou už ve 2. st. n. l. Tertullianem: *„Po Kristu nám není třeba žádné touhy po zvídavosti, po evangeliu není třeba žádného zkoumání“*.

Společenská situace, vytvářející z křesťanství monopolní ideologii, tak ukončila „pohanská“ učenecká centra a s nimi i slibný rozběh antické matematiky. Společenská situace nadto nedávala dostatečné podněty pro rozvoj ani rozvinutých matematických teorií, ani praktických aplikací, a tak na počátku tohoto vývoje neobyčejně příznivý souběh společenských předpokladů, který dal antické matematice vyrůst, byl přerušen.

V 8. až 6. st. př. n. l. se začaly v Řecku utvářet městské státy, v nichž docházelo k široké dělbě práce, rozvíjela se řemesla a obchod a začalo se využívat práce otroků. V 7.– 6. st. př. n. l. vláda rodové aristokracie přecházela v demokracii, v níž se k moci dostávaly zámožné vrstvy a pak přes ranou řeckou tyranidu k demokracii, na níž se účastnili ti, kteří byli svobodní. A svobodných obyvatel bylo podstatně více. Argumentace různých soupeřících filozoficko-politických seskupení vycházela z hledání rozporů v tvrzeních svých soků a své záměry musela vyvozovat logicky tak, aby je nebylo možno napadat. Společenský rozvoj tak šel ruku v ruce s rozvojem racionální argumentace, s odhalováním prohřešků proti logice, s filozofickými disputacemi a i s matematikou, která postupně ztrácela charakter praktického počtářství a vytvářela ucelené teorie, v nichž se začala uplatňovat jasná pravidla odvozování a potvrzování výsledků.

	»VNĚJŠÍ« ŘECKO OSTROVY A MALÁ ASIE	ŘECKO	ITALIE »VELKÉ« ŘECKO	ALEXANDRIE A AFRICKÉ POBŘEŽÍ
1. POL. 6. ST. P.N.L.	**IONSKÁ FILOSOF. ŠKOLA** *Mílétos* THALÉS /?62$\frac{5}{4}$-54$\frac{8}{3}$/ ANAXIMANDROS /?610-546/ ANAXIMENÉS /?585-525/ HEKATAIOS HERAKLEITOS Z EFEZU /?544-480/		**PYTHAGOREJSKÝ SPOLEK** *Krotón* → PYTHAGORAS ZE SAMU /?571-497/	
	DÉMOKRITOS Z ABDÉRY /?460-380/ HIPPOKRATÉS Z CHIU /KOL. 440/	*Athény* → ANAXAGORAS Z KLAZOMEN /?500-428/ HIPPIAS Z ELIS /?480-?399/ SÓKRATÉS /469-399/ ANTIFÓN /5.ST. P.N.L./	**ELEJSKÁ ŠK.** PARMENIDES /?540-450/ ZENON Z ELEA /?490-430/ EMPEDOKLES /?483-430/ Z AKRAGANTU HIPPIAS Z METAPONTU /KOL. 450/	*Kyréné* THEODÓROS /?465-399/
387	*Kyzikos* EUDOXOS /?408-340/ Z KNIDU MENAICHMOS /KOL. 350 P.N.L./	*Akademia* 387 PLATÓN /427-347/ THEAITETOS /?417-368/	*Tarentum* ARCHYTAS /+360 P.N.L./	
335	ARISTARCHOS ZE SAMU /?310-230/ *Rhodos* EUDEMOS /KOL. 320/ POSEIDONIOS Z APAMEIE /?135-?44/ GEMINOS /KOL. 75 P.N.L./	*Lykeion* 335 → ARISTOTELES /384-322/	*Syrákúsy* ARCHIMÉDÉS /287-212/	*Alexandreia* *Múseion* ?300 EUKLEIDÉS /?365-280/ ERATOSTHENÉS Z KYRÉNÉ /?276-195/ APOLLONIOS Z PERGÉ /?262-190/ DIOKLES /KOL 180/ NIKOMEDES /KOL 180/ HIPSIKLES /KOL 180/
2.1. ST. P.N.L.	HIPPARCHOS Z NIKAIE /180-125/		*Řím* MARCUS TERENTIUS VARRO /116-27/ VITRUVIUS POLIA /KOL. 20/	

Časová mapka antických matematiků

	MIMOŘECKÉ OBLASTI	ŘECKO	ŘÍM	ALEXANDRIE
1.ST. N.L.	NIKOMACHOS Z GERASY /KOL.100/		GAIUS IULIUS HYGINUS /KOL. POČ. N.L./ LUCIUS IUNIUS MODERATUS COLUMELLA /KOL. POL. 1 ST./ SEXTUS IULIUS FRONTINUS /?30-104/ THEODOSIUS Z PITANE /KOL. 100/ THEON ZE SMYRNY /KOL. 130/	HERON /KOL. 100/ PTOLEMAIOS KLAUDIOS /?83-161?/ MENELAOS /KOL. 100/
	←	IAMBLICHOS Z CHALKIDY /?283-330?/		DIOFANTOS /KOL. 250/ PAPPOS /KOL. 320/ THEON /KOL. 370/ HYPATIA /?370-?415/
5.ST. N.L.	PROKLOS DIADOCHOS Z BYZANTIA /412-485/			
6.ST. N.L.				
		SIMPLIKIOS /KOL. 520/	BOETHIUS /?480-525/	
529		529 athénská akadémia rozpuštěna Justiniánem		

Matematika se tak stala na jedné straně produktem společenského rozvoje otrokářské demokracie, na druhé straně se stala svým způsobem uvažování též nástrojem filozofů a politiků té doby — byla vzorem umění vést spor a vyvracet nepodložené názory protivníka.

Charakteristika starověké antické matematiky

Porovnáme-li antickou řeckou a helénistickou matematiku s matematikou egyptskou a matematikou mezopotámskou, vyplyne nám několik charakteristických rysů, které ji odlišují od předchozího vývoje:

(1) Poprvé se v této etapě setkáváme s neanonymní matematikou. Známe její tvůrce, víme, že jich bylo značné množství a víme dokonce, že patřili do určitých škol (viz str. 90, 91).
(2) Matematika přerůstá návody na řešení úloh a vytváří určité logicky budované teorie, které sjednocují dosažené výsledky a mají vlastní metodiku ověřování správnosti tvrzení v daném systému.
(3) Poprvé se vytvářejí různé koncepce matematiky a dokonce vývoj v tomto směru pokračuje natolik, že se vyjasňují hranice nosnosti těchto koncepcí.
(4) Jsou zde formulovány některé matematické problémy, jež jsou podnětné pro další rozvoj matematiky zejména tím, že ověřují možnosti vymezených konvenčních systémů matematických teorií, resp. přinášejí nekonvenční řešení.
(5) Mezi 4. st. př. n. l. a 2. st. n. l. se formuje určité časové jádro, v němž jsou vytvářeny nejvýznamnější výsledky.
(6) Matematika se začíná poprvé členit do různých přirozených, předmětem vymezených disciplín, jejichž vzájemná vazba je volná, ale přece jen určená. Tím se nahrazuje dosavadní řazení matematických problémů podle oblastí aplikace.

V tomto odstavci se nebudeme snažit podat přehled všech výsledků antické matematiky. Zaměříme se na obecnější rysy jejího vývoje, které budeme ilustrovat některými příklady. Při četbě je proto dobré vždy si znovu připomínat údaje tabulek na str. 90 a 91, protože výklad nebude chronologický, ale bude sledovat vývojovou logiku určitých otázek.

Konstrukce množiny přirozených čísel

„*Tak zvaní pythagorejci byli prvními, kteří se zabývali vědami ($\tau\alpha\ \mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\alpha$). Protože postupně poznali, že vztahy a zákony hudební harmonie jsou založeny na číslech a stejně tak i všechny ostatní předměty, jak z jejich přirozenosti vyplývá, se zřejmě číslům zalíbily … tak vyslovili domněnku, že prvky čísel jsou prvky i všech věcí a že celý svět vcelku je harmonií a číslem.*“

(Aristoteles, *Metafyzika*)

Pythagoras ze Sámu (* mezi 600–570 p. n. l., Samos –†po 509 p. n. l. Metapontum)

Zprávy o jeho životě jsou málo spolehlivé, a nejstarší jeho (spíše smyšlený) životopis pochází až z 3.–4. st. nl. Údajně mnoho cestoval (Foinikie, Egypt, Mezopotamie, snad i Indie). Byl stoupencem rodové aristokracie a dostal se do sporu s nastupujícími demokratickými politiky z kupeckých vrstev. Přesídlil proto ze Sámu do jihoitalského Krotónu. Tam kolem r. 520 založil uzavřenou filozofickou školu, považovanou i za náboženský spolek a politickou organizaci. Po vítězství demokratů v Krotónu r. 509 musel město opustit, odešel do Metapontu, kde zemřel. Pythagorejská škola byla autoritativní a její učení bylo tajné, předávalo se jen ústně. Členové školy se dělili na *naslouchající* (akousmatikoi), kteří se učili z přednášeného a nesměli mluvit, a *vědoucí* (mathematikoi), kteří mohli vyjadřovat názory a klást otázky. Vše bylo připisováno Pythagorovi. Matematice dali vlastně pytagorejci jméno. Jejich koncepci světa, opírající se o přirozená čísla, narušil jejich vlastní objev nesouměřitelnosti a nemožnosti vyjádřit poměrem přirozených čísel kvadratické iracionality. Pythagorovu větu znali pravděpodobně již v Mezopotamii, pythagorejcům se připisuje její důkaz. O pythagorejské matematice obšírně referuje van der Waerden ve své knize *Ontwakende Wetenshap* (1950).

Pythagorejská koncepce vycházela z téze, že „základem všeho je číslo“. Číslem ale byl chápán počet věcí — tedy přirozené číslo větší než jedna. Mluvilo-li se o počtu „dílů“ jednotky, pak byl vzat za základ počtu „díl“ a operovalo se opět s počtem dílů — zde čitatelem, tedy opět s přirozeným číslem. Operace se zlomky m/n (kde m, n jsou přirozená čísla — tedy s racionálními čísly) se od operací s přirozenými čísly příliš nelišily.

U pythagorejců tedy byla nasnadě domněnka, že vše lze vyjádřit přirozeným číslem. Poprvé vytvořili logicky budovanou aritmetickou teorii — učení o sudém a lichém (viz 9. knihu Eukleidových *Základů*), kde jsou formulována tvrzení:

(i) součet několika sudých čísel je sudý
(ii) sudý (lichý) součet lichých čísel je sudý (lichý)
(iii) rozdíl dvou sudých (lichých) čísel je sudý
(iv) rozdíl sudého a lichého čísla je lichý
(v) součet sudého se sudým (lichým) je sudý (lichý)
(vi) dělí-li liché číslo sudé, tak dělí i jeho polovinu ...

V této teorii je počátek všech dalších problémů dělitelnosti v oboru přirozených čísel a tím i celé teorie čísel. Pythagorejci uvažovali o rozkladu čísel na prvočíselné činitele a všímali si vztahu čísla k součtu jeho dělitelů apod. Tak dospěli k číslům dokonalým, k číslům spřízněným apod.

Přirozenost vytvoření „větších" přirozených čísel v rámci potřebnosti tehdejšího počtáře či ekonoma byla dána systémem skládání číselných symbolů ať už v herodiánském nebo ionském zápisu, které končily u myriad (= 10^4), resp. myriady miriad (10^8) (obr. 36).

5	𐅃	*pente*	*1000*	Χ	*chilioi*	*50*	𐅄	*pente-deka*
10	Δ	*deka*	*10 000*	Μ	*myrioi*	*500*	𐅅	*pente-hekato*
100	Η	*hekaton*						

(36) Číslice herodiánské (akrofonické či attické popsané ve 2. stol. př. n. l. Herodianem, ale existující již dříve)

Před matematikem se však objevily otázky jiné:

(i) Kolik je přirozených čísel ve srovnání s jinou představou velmi velkých množství.

(ii) Provést algoritmizaci matematické konstrukce stále větších přirozených čísel — ukázat tedy na to, že množina všech přirozených čísel je potenciálně nekonečná.

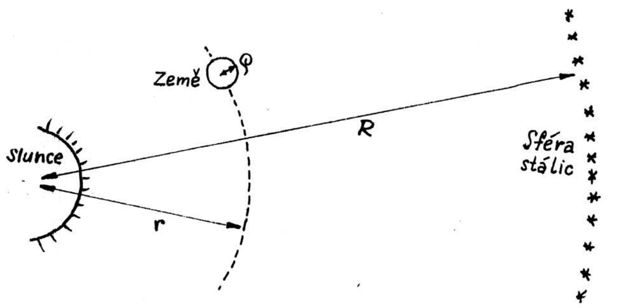
Tyto otázky si postavil Archimedes a odpověděl na ně ve spisku „$\pi\sigma\alpha\mu\iota\tau$" (O počítání písku). V jeho úvodu říká: *„Existuje ... král Gelon, který se domnívá, že množství všeho písku je nekonečně velké ... Jsou však jiní, kteří si nemyslí, že by ho bylo nekonečně mnoho, avšak rovněž se domnívají, že ještě nebylo vytvořeno číslo, které by bylo schopno vyjádřit jeho množství. Je zřejmé, že kdyby zastánci tohoto názoru uvažovali masu písku naplňující tvar Země ... až k nejvyšším horám pískem, byli by jistě méně přístupni tomu, že vůbec lze vyjádřit číslo převyšující množství tohoto písku. Já však chci geometrickým důkazem, který* *můžeš sledovat, ukázat, že mezi čísly, která jsem nalezl a popsal ve spise zaslaném Zeuxippovi, nejsou jen některá čísla větší než množství všeho naznačeného písku (jehož objem je jak zeměkoule), nýbrž také taková, jež co do velikosti převyšují množství písku ve vesmíru“.*

α̅	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

(37) Číslice ionské využívající alfabetu

Archimedes pak nejprve ukázal, jak ionský systém záznamu čísel dovoluje vyjádřit přirozená čísla až do myriady myriad, tj. do 10^8 a tuto množinu přirozených čísel nazývá oktádou prvých čísel skládající se z monad (10^0), dekad (10^1), hektad (10^2), chiliad (10^3), myriad (10^4) … Myriada myriad pak pro něj byla východiskem pro další oktádu čísel, kterou nazval oktádou druhých čísel zahrnující dále konstruovaná čísla 10^8 až $10^{8 \cdot 2} - 1$. Číslo $10^{8 \cdot 2}$ je pak základem oktády třetích čísel ($10^{8 \cdot 2}$ až $10^{8 \cdot 3} - 1$) a takto jednoduše slovně (protože naše číselné symboly nemá) oktádou oktádních čísel ($10^{8 \cdot 10^7}$ až $10^{8 \cdot 10^8} - 1$) uzavírá tzv. první periodu přirozených čísel. Číslo $10^{8 \cdot 10^8}$ je základem čísel druhé periody a Archimedes pokračuje v této konstrukci dále až do oktády čísel oktádních oktádní periody, tedy až k číslu $(10^{8 \cdot 10^8})^{10^8}$ a uzavírá, že tento postup lze i dále prodlužovat. Dal tak algoritmus konstrukce přirozených čísel, algoritmus jejich vyčíslení, zvládl matematicky aristotelovské potenciální nekonečno.

Po této konstrukci Archimedes činí neméně důležitý další krok, kterým chce přiblížit čtenáři svého soupisu na hmotném modelu „počtu písečných zrnek“ rozsah možností záznamu ve své konstrukci. Vychází z heliocentrické představy sluneční soustavy ve formulaci svého současníka Aristarcha ze Samu, ze znalosti Eratosténova výpočtu poloměru zemské sféry a chce (viz obr. 38) naplnit celou sféru stálic pískem.



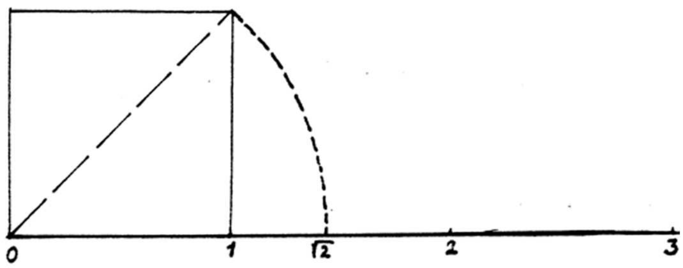
(38) Schema k Aristarchovu obrazu vesmíru

Pak z Aristarchova vztahu $R^2 : r^2 = r^2 : \varrho^2$ vyplývá, že poloměr sféry stálic bude $R = r^2/\varrho$. Tuto sféru naplňuje prachovými zrnky, jejichž velikost je určena fyzicky tak, že jejich myriada tvoří zrnko máku a na šířku palce se směstná 40 makových zrn. Pak ukazuje, že k záznamu počtu těchto jemných zrnek písku nepřekročí ve svém systému ani první periodu. Všech písečných zrn, která by naplnila sféru stálic, by byla chiliada myriad oktády osmých čísel prvé periody (tedy 10^{63}).

Objev iracionality a krize pythagorejské koncepce matematiky

Pythagorejská škola nebyla zdaleka jen matematiku pěstujícím sdružením. Byla to především uzavřená filozofická sekta a podle historika Herodota bychom měli Pythagora chápat spíše jako náboženského proroka než matematika. Herakleites v souvislosti s pythagorejci mluví o „mnohoznalství bez rozumu“ a autoři antických komedií členy této sekty ztvárňují jako chudé, špinavé vegetariány (!), z nichž je třeba si dělat úsměšky.

Pythagorejské téze, že vše na světě lze kvantifikovat pomocí přirozených čísel či jejich poměrů (racionálních čísel), vedla na jedné straně ke snaze o zkoumání čistě kvalitativních jevů kvantitativními metodami (pythagorejská hudební harmonie, ze které se vyvinula „matematická“ disciplína — *musica*), na druhé straně ke spekulativnímu přiřazování číselných hodnot zcela neodůvodněně některým jevům reálného světa. Číselná mystika tak přiřazovala sudým číslům ženský princip a lichým číslům princip mužský. Nejmenší ženské a mužské číslo (2, 3) spojením dávaly symbol manželského spojení; a zde byl spor, zda jím je 5 (jako $3+2$) nebo 6 jako součin (3×2). Součin byl operací plodnosti a v prvé dekádě této plodnosti byla zbavena jen 7, kterou nebylo možno rozložit. Desítka byla symbolem dokonalosti i vesmíru, stejně jako základ všech čísel (jednotlivost) 1.



(39) Konstrukce kvadratické iracionality

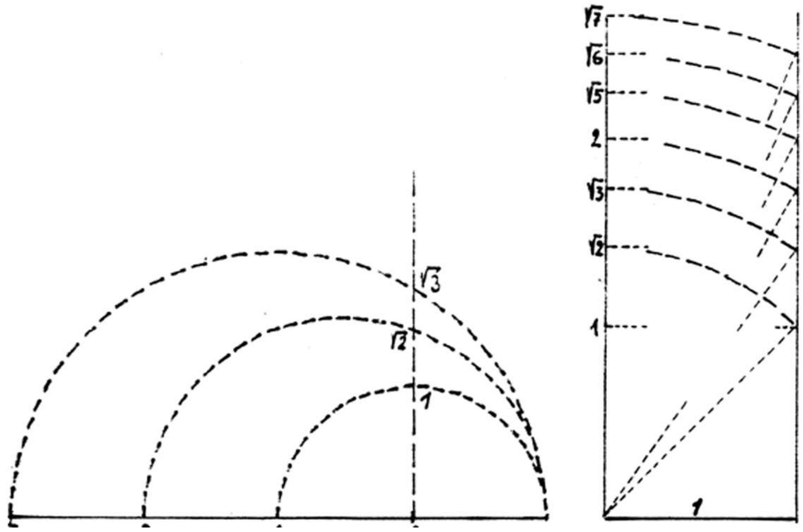
V nauce o harmonii, která právě měla být důkazem možností kvantifikace vnějšího světa, vycházeli pythagorejci z toho, že je-li oktáva dána poměrem 2 : 1, pak kvintu vyjadřuje poměr 3 : 2, kvartu 4 : 3, celý tón 9 : 8 a velký půltón 256 : 243. To zakládali na studiu monochordu a experimentálním zjištěním, že intervaly mezi celými tóny jsou nepřímo úměrné výšce tónu. (Je-li a výška tónu od určitého základu 0, pak interval příslušející tomuto tónu od daného základu je $1/a$).

Rozdíl $1/a - 1/c$ je interval mezi tóny výšky a a c. Máme-li vložit mezi oba tóny tón b, tak, aby jeho interval vůči a i c byl stejný, pak musí platit

$$1/a - 1/b = 1/b - 1/c,$$

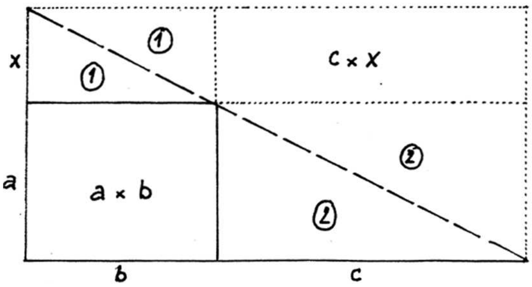
z čehož po úpravách vyplývá, že $b = 2ac/a + c$ a tedy b je střední harmonická úměrná, tedy harmonický průměr. Proč však nedělit intervaly v jiných „úměrných“ a těch se v té době užívala celá desítka. Pak se ovšem mohla při dělení oktávy v geometrickém poměru $1 : x = x : 2$ objevit hodnota $x = \sqrt{2}$. Stejná hodnota se mohla objevit i při úvahách o trojicích čísel vyhovujících Pythagorově větě pro případ rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka o straně rovné jedné. Přepona tam byla vyjádřena rovněž $\sqrt{2}$.

Jistá je pouze skutečnost, že pythagorejci dospěli k závěru, že takto popsané reálné skutečnosti nejsou vyjádřitelné v jejich koncepci čísla. To znamená, že $\sqrt{2}$ nelze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel. Jejich důkaz vycházející ze sporu s předpokladem pravdivosti $\sqrt{2} = m/n$ kde m, n jsou nesoudělná, přirozená čísla, byl převzat do 10. knihy Eukleidových *Základů* a ukázal, že v matematice se nevystačí s aritmetikou přirozených čísel, že však zároveň geometrické úsečky poskytují obsažnější model, než byla množina pythagorejských kladných racionálních čísel (viz obr. 40).



(40) Konstrukce iracionálních bodů na přímce pomocí Pythagorovy a Eukleidovy věty

Současně s tím došel Theodoros z Kyrene k závěru, že druhé odmocniny z přirozených čísel intervalu $\langle 2, 17 \rangle$ jsou kromě úplných čtverců (4, 9, 16) iracionální, Na druhé straně se snadno jak z konstrukcí spojených s Pythagorovou větou nebo s Eukleidovou větou (obr. 40) ukázalo, že pro všechny tyto hodnoty nevyjadřitelné racionálním poměrem — a tedy v pythagorejském pojetí čísla neexistujícím — existuje obraz na geometrické úsečce. Geometrické úsečky zahrnuly tak mnohem širší množinu „veličin“ než pythagorejská čísla. Bylo pouze třeba ověřit, zda (a jak) lze s takovýmito veličinami provádět běžné aritmetické operace. Ukázalo se, že při zachování některých podmínek (homogennosti veličin vstupujících v operace, nepřevýšení trojrozměrnosti výsledku operace a zachováním kladného výsledku) zde není obtíží. Snad nejlépe je to vidět na geometrické konstrukci dělení. Dělit pomocí tzv. připojování ploch bylo možné jen útvar většího počtu rozměrů útvarem menšího počtu rozměrů (na obr. 41 plochu ab úsečkou c). Obr. 41 ukazuje, že platí $ab = cx$ a tedy x je hledaný podíl.



(41) Geometrické dělení

Tak mohl současník Platonův Eudoxos z Knidu přijít s myšlenkou „obecné veličiny“ jako struktury zahrnující jak pythagorejská racionální čísla, tak úsečky obsahující i iracionální body. Jeho „teorie proporcí“ je tak vlastně antickou podobou teorie reálných čísel budované s úspěchem až v 2. pol. 19. století (Dedekind, Weierstrass, Cantor).

Eudoxos tak dal teoretický základ k antické geometrizaci matematiky a ke koncepci, která se posléze stala základem Eukleidových „Stoicheja“

Paradoxy počítání s nekonečně velkými množstvími a nekonečně malými veličinami

Jedním z problémů antické matematiky byly problémy převoditelnosti rovinných útvarů omezených křivkami (speciálně třeba kružnicemi) na s nimi rovnoploché rovinné útvary omezené úsečkami. Problém byl komplikován ještě požadavkem, aby konstrukce byla proveditelná pouhým pravítkem a kružítkem.

Hippokratovi z Chiu se kolem roku 440 př. n. l. podařilo takto zkonstruovat tři příklady po něm později nazvaných menisků (měsíčků či půlměsíčků) (viz obr. 42). Zbývající typy byly objeveny až v roce 1760. Teprve ve 20. století Čebotarev dokázal, že podobných útvarů může být právě jen těchto pět typů. Tato skutečnost však ve starověku nebyla známa, a tak Hippokratovy konstrukce jen podněcovaly k hledání konstrukčních postupů kvadratury kruhu.

Bylo zřejmé, že vepisováním lomené čáry do oblouku daného rovinného obrazce se při vzrůstajícím počtu lomení a dostatečném přimykání lomené čáry k oblouku bude obsah vepsaného mnohoúhelníka blížit obsahu daného obrazce. Jak si v tomto postupu ale počínat? Kolik musí být stran onoho vpisovaného mnohoúhelníka a jak veliké mají být? V pythagorejské koncepci se uvažovalo o nekonečném množství nedělitelných částic, z nichž se těleso skládá. O velikosti těchto částic se však nic netvrdilo.

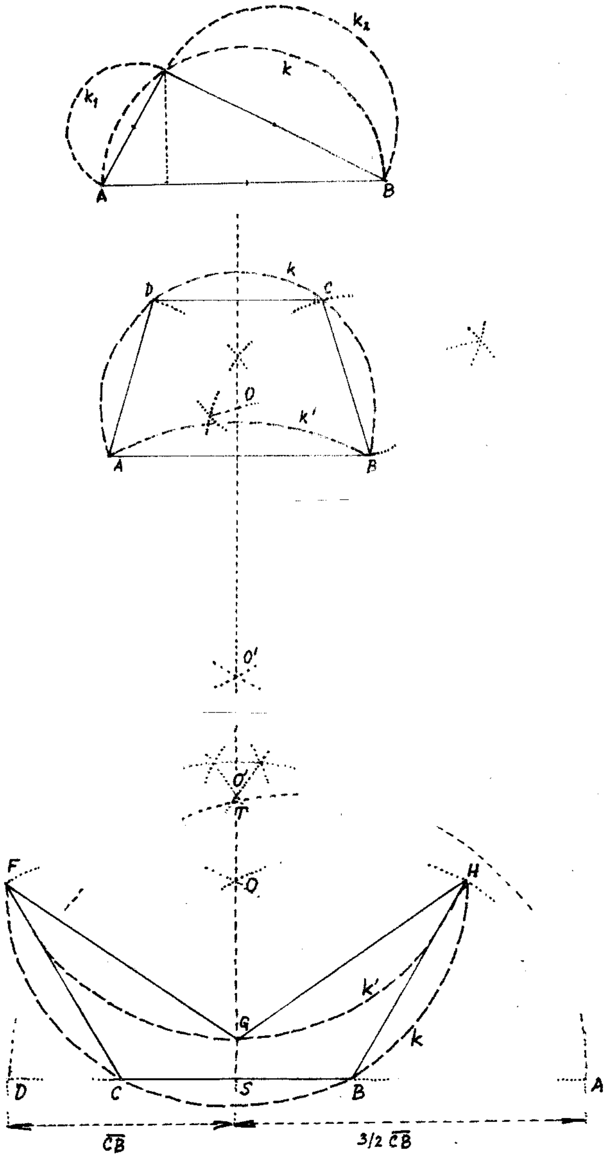
Zenon z Elea však ukázal v 1. pol. 5. stol. př. n. l., že je třeba nad těmito otázkami přemýšlet. Jeho paradoxy (nebo aporie) upozorňují na nepřesnosti tehdejších úvah. Jeho aporie míry říká: „Je-li těleso z nekonečného množství (∞) nedělitelných částí (ε), pak mohou nastat dva případy:

1) $\varepsilon = 0$ a pak musí být celé těleso nulové
2) $\varepsilon \neq 0$, konečné, byť velmi malé, a pak musí těleso z nekonečného množství takových ε prvků složené být nekonečně velké.

Nebudeme zde rozebírat další Zenonovy aporie (šíp, Achilles, stadion). Původně jich bylo velké množství, nám se dochoval nepatrný zlomek díky Aristotelově polemice se Zenonem. Podstatou všech těchto aporií je varování před paradoxem nekonečně mnoha časových okamžiků (konečných byť malých), v nichž probíhá proces, jehož členové konvergují k nule. Neujasněnost výchozích principů by musela popřít dosažení konce procesu v konečném čase, jak naznačuje právě Zenon.

Atomista Demokritos z Abder v 5. stol. př. n. l. chtěl na tyto námitky reagovat pojetím matematiky, ve které by bylo vyloučeno nekonečno. Jeho atomy jsou sice hodně malé, ale konečné a nejsou neomezeně dělitelné; je jich větší ale konečný počet. Demokritos si takovou elementární úsečku představoval jako něco co má jen začáteční a koncový bod a žádný další bod. Kam tato koncepce vedla, se ukazuje při Antifonově úvaze (asi 430 př. n. l.) o kvadratuře kruhu. Kruh je zde považován za mnohoúhelník s velkým, ale konečným množstvím velmi malých stran. A protože se už ví, že každý mnohoúhelník lze pomocí elementárních konstrukcí s pravítkem a kružítkem převést na čtverec, byla by podle této koncepce kvadratura kruhu možná.

Matematici tak vlastně už v antice dospěli k poznatku, že



(42) Hippokratovy menisky

ne všechny vlastnosti nelimitních útvarů se přenášejí na útvary limitní.

Tak bylo možné, že byla zejména Eudoxem vyzvednuta myšlenka Anaxagorova: *V malém neexistuje nejmenší, ale vždy ještě menší.* Tato myšlenka neodmítla nekonečnou dělitelnost veličin, ale požaduje, aby celý nekonečný proces byl ukončen limitou, čímž rozumí hodnotu, která už do procesu nepatří, ale procesem není přesáhnuta.

Takto vlastně precisoval tuto myšlenku Eudoxos ve své exhaustivní (vyčerpávací) metodě (tento název dostala až v 17. století), která se posléze objevila v Eukleidových *Základech* (kniha 10, věta 1): *Je-li od dané veličiny odebrána část větší než polovina a se zbytkem vždy uděláme totéž, pak po dostatečně velkém počtu kroků obdržíme veličinu menší, než je veličina libovolně daná.* Veličiny, které zde bere Eudoxos v úvahu, však musí zaručovat určitý způsob měřitelnosti daný axiomaticky (dnes tomuto axiomu říkáme Archimedův, i když ho formuloval Eudoxos podstatně dříve): *Pro každé dvě veličiny a, b existují přirozená čísla m a n taková, že $ma > b$ nebo $nb > a$, čili že znásobením jedné veličiny převýšíme veličinu druhou.*

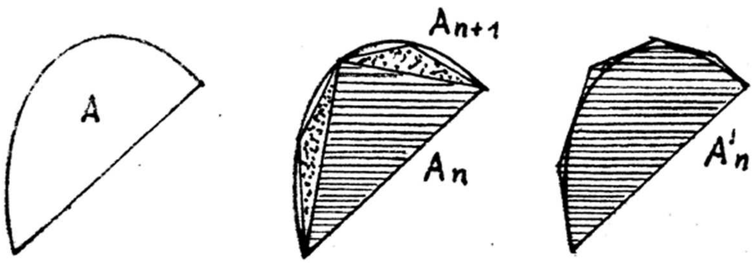
Podstatou Eudoxovy exhaustivní metody není jen plné akceptování Anaxagorova limitního procesu, ale především metoda prokázání jedinečnosti limity, i když v prostředcích tehdejší, jen slovně bez symboliky operující, matematiky.

Má-li být určen obsah plochy rovinného útvaru A (obr. 43), pak postupuje Eudoxos v každém konkrétním případě takto:

1) do útvaru vpisuje vzrůstající posloupnost (A_n) útvarů známého obsahu
2) útvary (A_n) jsou voleny tak, aby rozdíl $A_n - A$ mohl po určitém počtu kroků být menší než libovolná předem daná hodnota veličiny b (veličiny jsou chápány vždy jen jako kladné)
3) aby prokázal, že žádné A_i z (A_n) nemůže být větší než A, konstruuje klesající posloupnost (A'_n) z útvarů opsaných A, pro které platí, že $A'_n > A$ pro jakékoliv n.
   Ze vztahu $A'_n > A > A_n$ pak vyplývá $A'_n - A_n > A - A_n$ a tedy platí, že A se liší od A_n o méně než libovolná hodnota $b = A'_n - A_n$.
4) posledním krokem zde je už nalezení konkrétní hodnoty limity této posloupnosti, která se opírá o vnitřní aritmetické

vlastnosti, z nichž je posloupnost vytvářena.

Eudoxovu exhaustivní metodu pak využil ke konkrétním matematickým výsledkům Archimedes.



(43) Útvary vepsané a opsané dané úseči

Vyloučená řešení klasických antických úloh

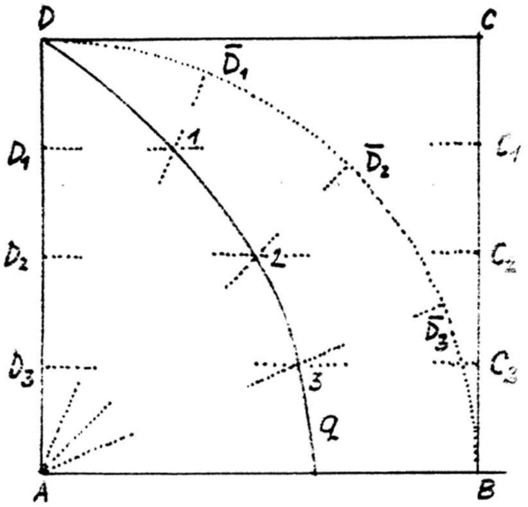
I v širší veřejnosti je známo, že v antickém starověku existovaly v matematice problémy trisekce úhlu, zdvojení krychle a kvadratury kruhu, o jejichž řešení se pokoušeli matematici ještě v 18. století a které mezi „amatérskými řešiteli" nacházejí odezvu dodnes.

Mluvíme-li o těchto úlohách zde, je to především proto, abychom si uvědomili závislost jejich formulace i řešení na koncepci matematiky, na požadavcích na přesnost řešení a na používání určitých prostředků v matematice. Právě v tomto období se tyto předpoklady řešení začaly fixovat a utvářet určitou koncepci matematiky, která odmítla libovůli do té doby v matematice používaných metod a prostředků.

Nezní tedy paradoxně, že úlohy byly v antické matematice řešeny a dokonce vyřešeny. Ukážeme si některá řešení a pak vysvětlíme proč nebyla dále matematikou akceptována.

Trisekce úhlu

Démokritův současník Hippias z Elis využil k řešení trisekce úhlu kinematické metody, s jejíž pomocí konstruoval empirickou křivku nazvanou kvadratrix (obr. 44).



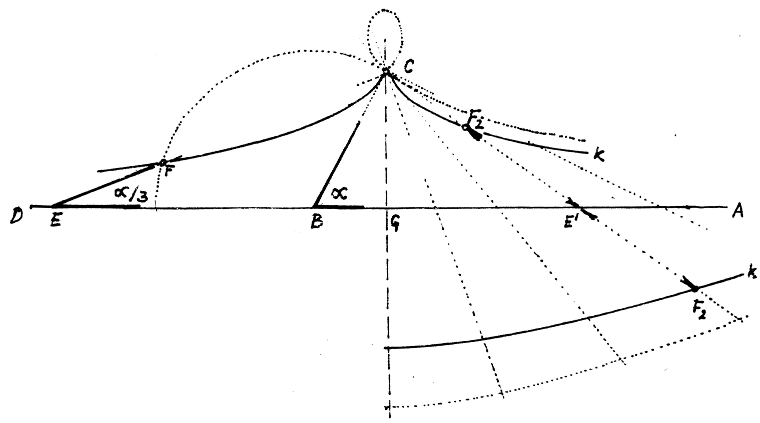
(44) Hippiova kvadratrix

V daném čtverci $ABCD$ se začnou současně rovnoměrně pohybovat strana DC do poloh D_iC_i až AB, a strana AD do poloh $A\overline{D}_i$ až AB tak, že ve stejný okamžik ukončí svůj pohyb v úsečce AB. V každém okamžiku se však tyto pohybující se úsečky protnou v bodech 1, 2, 3 … a tyto body vytvářejí křivku q, která má tu vlastnost, že každé úsečce BC_i přiřazuje rovnoměrně úhel $BA\overline{D}_i$. Vezmeme-li tedy jakýkoliv úhel $BA\overline{D}_i$ a přiřadíme mu úsečkou D_iC_i — rovnoběžnou s AB — úsečku BC_i, pak rozdělením této úsečky na tři (nebo n) stejných dílů, můžeme zpětným přiřazením na q najít bod, jehož spojnice s A tvoří s ramenem AB úhel třetinové (či n-tinové) velikosti daného úhlu.

O mnoho mladší Nikomedes — současník Diofantův (žijící ve 2. st. n. l.) konstruoval kinematicky křivku nazvanou konchoida, jejíž pomocí lze zkonstruovat k jakémukoliv ostrému úhlu úhel třetinový (obr. 45):

Pevným bodem C prokluzuje přímka CE, jejíž pevný bod E

se pohybuje po přímce AD. Při pohybu přímky CE pak libovolný její bod F opisuje křivku — Nikomedovu konchoidu — která má v polorovině AEC tvar podle toho, je-li vzdálenost $EF <$ nebo $=$ nebo $>$ kolmé vzdálenosti C od AE. V případě, že EF se této vzdálenosti rovná, má v bodě C bod vratu, v případě že EF je větší než tato vzdálenost, vytváří v bodě C dvojný bod. Pak můžeme zvolit libovolný ostrý úhel $\alpha = \sphericalangle ABC$, položit na AE tak, aby druhé rameno procházelo daným bodem C, a opsat z bodu B kružnici poloměrem BC. V bodě F protíná kružnice konchoidu a spojnice CFE tvoří spolu s ABE třetinový úhel úhlu α. (Druhý průsečík F' kružnice s konchoidou dává třetinový úhel pro $180° - \alpha$).



(45) Nikomedova konchoida a její využití k trisekci úhlu

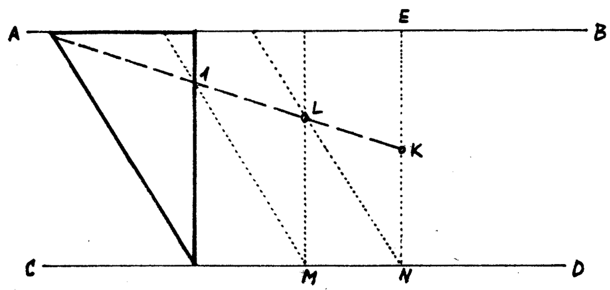
Nikomedova konchoida vlastně vznikla z operace „vsouvání“, která byla užita právě pro konstrukci třetinového úhlu. Operace vsouvání byla však známa už Archimedovi.

Zdvojení krychle

Rovněž pro tuto — jindy také jako délský problém nazývanou — úlohu našla antická matematika řešení. Už Hippokrates z Chiu nalezl postup, při kterém je nezbytné vkládání dvou středních geometrických úměrných. Archytas z Tarentu našel rovněž řešení zakládající se na této myšlence a opírající se o kinematický princip. O sto let mladší Eratosthénés — současník Archimedův — sestrojil dokonce přístroj sestávající ze tří shodných pravoúhlých trojúhelníků z nichž byl jeden jednou odvěsnou plně postaven na jedné z rovnoběžek AB a CD, přičemž protilehlým vrcholem spočíval na druhé a zbývající dva (zde čárkované) trojúhelníky se posouvaly mezi oběma rovnoběžkami tak, až průsečíky jejich stran *1* a L vytvořily přímku procházejícím bodem A a bodem K (pro který platilo $EK = NK$).

Pak platilo, že

$$2NK^3 = ML^3.$$



(46) Eratosthénovo mezolabium

Jde tedy opět o řešení založené na kinematickém principu.

Vyjasňování principů ležících v základech geometrických konstrukcí

Proč vlastně tato řešení, proti kterým by dnešní matematik nic nenamítal, byla z tehdejší matematiky vyloučena jako nepřípustná?

Matematika v prvém období svého antického vývoje se začala přetvářet z návodů na řešení různých praktických kvantifikovatelných problémů na nauku, v níž začala platit určitá pevná základní pravidla. Už pythagorejci ve svém učení o sudém a lichém ukázali, že lze postupně z primitivních tvrzení (axiomů) budovat logickou dedukcí další nová tvrzení a prokazovat jejich platnost. Totéž ukázal i Thales o některých větách geometrie. Sokrates (469–399) svou formou hledání pravdy v dialogu přispěl ke zpřesněnému vymezování vlastností popisovaných objektů a tedy k vyjasnění pojmu definice. Logická pravidla výstavby teorie přinesl ve svých analytikách Aristoteles (384–322) jen asi o dvě desetiletí starší Eukleida. Aristoteles také naznačil, že matematika se nemá zabývat pohybem, ani ho využívat, naopak, že zkoumáním pohybu se zabývá fyzika, v jeho pojetí věda o jevech reálného světa. Zde tedy byla hlavní příčina, proč Eukleides při konstrukci svého výkladu matematiky vycházel z koncepce vylučující pohyb ze základních principů, o něž se výklad opíral. Proto také se antická řešení klasických úloh antické matematiky odmítala a začala se hledat řešení, která by vycházela z Eukleidovy axiomatiky.

Závěr

Počátky řecké matematiky zahrnují období od Pythagora a Thaleta až vlastně po vznik vědeckých center té doby: Platónovy Akademie, Aristotelova Lýkea a alexandrijského Músea. Během této doby se matematika změnila z pouhé metody na řešení některých problémů konstruktivní či výpočetní povahy na soubor sevřenějších disciplin. Pro jejich budování byla už stanovena pravidla, základní principy, z nichž se vycházelo, metody formulování, vyvozování a ověřování dalších výsledků. V tomto procesu budování logickodeduktivního výkladu matematiky se uplatnily vedle čistě vnitřně matematických podnětů dosti podstatně i impulsy společenského vývoje antického Řecka, kde rozvoj otrokářské demokracie připravoval cestu k vedení dialogu, k ověřování pravdivosti logickými argumenty a k hledání rozporů v tvrzeních odpůrců. Krize některých matematických koncepcí byla plodná — ukázala cesty k překonání, které rozšířily a zobecnily předmět matematiky a ujasnily (a také omezily) principy, na kterých lze matematiku budovat. Tento způsob myšlení do značné míry ovlivnil další vývoj nejen matematiky, ale celé vědy.

Literatura

K problematice antického vývoje matematiky existuje rozsáhlejší literatura. Český a slovenský čtenář ji nalezne z velké míry v práci

[1] A. Kolman: *Dějiny matematiky ve starověku.* Academia Praha 1968.

Z přehledných prací dostupných v našich knihovnách:

[2] H. Wussing: *Mathematik in der Antike.* Leipzig 1965.

[3] B. L. van der Varden: *Probuždajuščajasja nauka.* Moskva 1959.

[4] A. Szabó: *Anfänge der griechischen Mathematik.* Budapest 1969.

[5] B. L. van der Waerden: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin 1983.

[6] M. Ja. Vygodskij: *Arifmetika i algebra v drevnem mire.* Moskva 1967.

[7] JACOB KLEIN: *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* MIT Press Cambridge 1968.

[8] O. NEJGEBAUER: *Točnye nauki v drevnosti.* Moskva 1968.

[9] I. D. ROŽANSKIJ: *Antičnaja nauka.* Moskva 1980.

[10] A. I. ZAJCEV: *Kul'turnyj perevorot v drevnej Grecii VIII–V vv. do n. e.* Leningrad.

[11] A. BONAR: *Grečeskaja civilizacija, T.1.,2.* Moskva 1958–1959.

[12] S. KULCZYCKI: *Z dziejów matematyki greckej.* Warszawa 1973.

[13] O. BECKER, ed.: *Geschichte der griechischen Mathematik.* Darmstadt 1965.

[14] A. G. BARABAŠEV: *Dialektika razvitija matematičeskogo znanija.* Moskva 1983.

[15] P. SCHREIBER, CH. SCRIBA: *5000 Jahre Geometrie.* Hildesheim 2001.

7. Zlatá doba řecké matematiky
Rozvinutí hlavních matematických teorií antiky

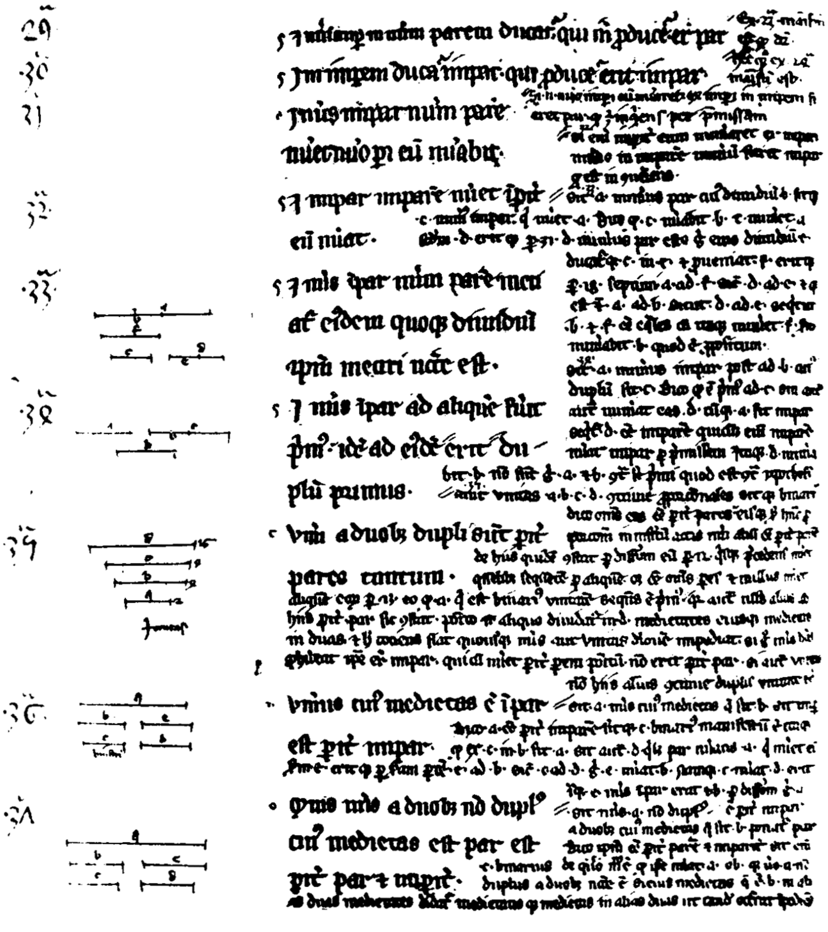
Úvod

Společenské předpoklady rozkvětu antické kultury nesly s sebou i možnosti pro rozvoj matematického bádání. Vytvoření Platónovy Akademie, Aristotelova Lýkeia a Ptolemaiem I. Soterem v Alexandrii založeného Músea v období 387–300 př. n. l. svědčí o prostoru, který si tehdejší společnost vytvořila pro vědeckou práci. Sdružování učenců, vytváření škol, institucionální i materiální zabezpečení této činnosti, povinnost přednášet své výsledky, shromažďování vědeckých děl v knihovnách, to vše dávalo velkou příležitost pro promýšlení celkových koncepcí, a nástup realizace širších programů jak ve filozofii, tak i ve vědě a matematika zde nebyla výjimkou.

Koncepční omezenost některých počátečních přístupů byla vlastně postačitelně pro tehdejší matematiku překonána u již zmíněného Eudoxa z Knidu. Jeho teorie proporcí, přinášející antické pojetí limity, teoreticky spojila aritmetiku racionálních čísel, jak se vytvořila u pythagorejců, s počítáním s geometrickými úsečkami, o nichž objev nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce (a tedy geometrické vyjádřitelnosti v oboru racionálních čísel nevyjádřitelné $\sqrt{2}$) ukázal, že se mohou stát souborem veličin obdobným pozdějším reálným číslům, zavedeme-li vhodné operace pro počítání s nimi, opírající se o geometrické konstrukce. Obdobně zapůsobila i Eudoxova exhaustivní metoda na řešení limitních otázek, souvisejících s pojetím nekonečně malých veličin a jejich nekonečných souborů a tím přispěla k vytvoření antické podoby diferenciálního a integrálního počtu.

Tato teoretická východiska se stala odrazovým můstkem pro vytvoření a rozvinutí hlavních matematických teorií antiky — teorií, které se staly klasickými vzory pro další rozvoj matematiky — a dlouhou dobu se k nim matematici vraceli nejen svými komentáři, ale též jako k inspiračním zdrojům a k východisku své další práce. To se projevilo zejména poté, když po překonání středověké stagnace v nových podmínkách renesančního myšlení začala evropská matematika znovu stavět na výsledcích antické vědy.

Lze říci, že od roku 300 př. n. l. převládl význam matematiky spojené s alexandrijským Múseiem. Zde působil na samém začátku jeho existence Eukleides, s ním je spojeno i působení Eratosthéna, Apollonia a o něco starší syrakuský matematik



Stránka z rukopisu Eukleidových *Základů* od Joanna Campana z Novary (asi 1250–1260) a mechanik Archimedes byl s tímto střediskem v úzkém korespondenčním styku. Rovněž poslední matematici helénistického období Hérón a Diofantos pracovali v tomto středisku.

Nejznámější výsledky helénistické matematiky jsou tedy bezesporu spojeny s alexandrijským Múseiem. Eukleidovy *Základy*, Apolloniovy *Kuželosečky* i jeho teoretické základy Ptolemaiovy „Velké sbírky“; ale i heuristická podstata Archimedovy „kvadratury paraboly“ byla vyložena v dopise alexandrijskému Erastothénovi.

Eukleidovy *Základy* se na dlouhou dobu staly vzorem deduktivně budované o systém axiomů se opírající teorie, jejíž jednotlivá tvrzení lze logicky prokazovat, vzorem, který nepůsobil jen v matematice, ale rovněž v dalších oblastech vědy. Apolloniovy *Kuželosečky* ukázaly způsob, jak do té doby jen jako řezy na kuželi známé křivky lze bodově konstruovat, přičemž je užita metoda, která v jiných společenských podmínkách 17. století dala podnět Fermatovi k vytvoření souřadnicového aparátu a prvých kroků v analytické geometrii právě na základě studia Apolloniova díla a paralelně k objevu Descartovu. Archimedes důsledně využil Eudoxových teorií a položil základy konkrétním výpočtům délek „oblých“ křivek a obsahů ploch či objemů těles omezených „oblými“ křivkami či plochami. Tyto myšlenky se staly v dalším vývoji základem rozvoje infinitesimálního počtu. Diofantova *Aritmetika*, zabývající se problematikou řešení rovnic, skýtala do budoucna dva podněty: především podnítila zkoumání tzv. neurčitých rovnic a vedle toho poprvé přinesla zkratkovitý záznam rovnic zavedením obecnější symboliky.

Antická axiomaticky deduktivně budovaná matematická teorie

Eukleides (* asi 365 př. n. l., † asi 280 př. n. l.)

Na počátku 3. st. př. n. l. bylo v Alexandrii Ptolemaiem I. Soterem založeno Múseion a v něm se stal Eukleides vůdčí osobností. Múseion — stánek mús — středisko vědy shromažďující významné učence všech oborů mělo svou hvězdárnu, botanickou a zoologickou zahradu, pitevnu a proslulou knihovnu. Eukleides sem pravděpodobně přišel už se svými *Základy*, které v deduktivně budovaném, systematickém celku spojily a transformovaly starší teoretické matematické výsledky a staly se od té doby na dvě tisíciletí vzorem budování vědecké teorie. Originál *Základů* se nedochoval, nejstarší rukopis je z 9. st. a chová ho Vatikánská knihovna, řada opisů komentátory různým způsobem přetvořených přispěla k jeho uchování.

O Eukleidovi je známo, že se zabýval i jinými oblastmi geometrie (např. kuželosečkami), též muzikou (tj. kvantitativním zkoumáním hudby), optikou i astronomií ale z jeho díla se zachovalo velice málo. Novější překlady jeho *Základů* do moderních jazyků vycházejí z Heibergovy a Mengeho řecko-latinské edice Euclidis opera omnia, I (1883)–VIII (1916). Český překlad Eukleidových *Základů* vydal v r. 1907 F. Servít. O Eukleidovi píše např. P. Schreiber (*Euklid*, Leipzig 1987).

Základy (řecky „Stoicheja“, latinsky „Elementa“) vznikly asi již před příchodem jejich autora Eukleida do alexandrijského Múseia, a i když se v nich podařilo shrnout do jednoho proudu výkladu tehdy nejnovější matematické teorie jako byla Theaitetova „teorie iracionalit“ nebo Eudoxova „teorie proporcí“, netvořily encyklopedii tehdejší matematiky; dokonce ani Eukleides do nich nezahrnoval všechny své výsledky z matematiky (mezi které patřila mj. jeho vlastní nedochovaná teorie kuželoseček).

Eukleidův traktát se zřejmě opíral o tehdy známé spisy, ale zahrnul do sebe i teorie v té době nedávno nové. „Stoicheia“, i když mohla mít vzor v nedochovaných spisech stejného názvu, jejichž autory byli Hippokrates z Chiu (? 440 př. n. l.) či blíže neznámý Leon (? 370 př. n. l.) či Theodosios z Magnesie (? 340 př. n. l.), jsou však prvým známým zachovaným matematickým dílem, opírajícím se o eudoxovskou koncepci čísla na rozdíl od pythagorejských „mathémat“ (tj. nauk). Při vytváření struktury výkladu Eukleidova díla hrály bezesporu důležitou roli Sokratovy úvahy o „definici“ a snad jen o dvě desetiletí starší Aristotelova formulace zásad logiky, jak se objevila v jeho „Prvních analytikách“.

Už sám název „stoicheia“, který může být překládán jako základy, ale také jako „řazení“ či „uspořádání“ základních znalostí, ukazuje, v čem je pojetí Eukleidova traktátu nové. Jaké jsou tyto nové prvky výkladu?

Výklad začíná *definicemi.* Na rozdíl od dnes nominativních definic jsou Eukleidovy definice genetické, popisné, snaží se charakterizovat objekty, které v dalším výkladu budou použity na základě popisu jejich vlastností a jejich vytváření z objektů jednodušších. Některé vlastnosti a pojmy však takovýmto způsobem definovat nemohou a přijímají je bez vymezení intuitivně.

Příklady definic:

D1. Bod je to, co nemá dílu.
D2. Čára pak délka bez šířky.
D4. Přímá je čára, která svými body se táhne rovně.

D5. Plocha je to, co jen délku a šířku má.
D23. Rovnoběžky jsou přímky, které prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna, nikde se nesbíhají.

Současně se v souboru definic objevují pojmy a vztahy, které by měly být zařazovány do systému axiomů či postulátů. Nutno však vidět, že v Eukleidově díle se tyto formy základů matematické teorie teprve tvoří, že pro dlouhou dobu předběhly další vývoj matematiky a že matematika byla schopna zpřesnit přístup ke svým logickým základům teprve v situaci, kdy bylo nezbytné po rozsáhlém extenzivním rozvoji znovu uspořádat, vyjasnit a zpřesnit celé základy matematiky a k tomu došlo až ke konci 19. a na počátku 20. století.

Zatímco téměř každá kniha *Základů* začíná definicemi, pouze před prvou knihou jsou uvedeny axiomy a postuláty. *Axiomy* (tj. zásady) jsou spíše aritmetického charakteru a vymezují vlastnosti veličin, s kterými se v *Základech* pracuje. Veličinou se zde rozumí jak racionální čísla, tak také geometrické úsečky a jejich poměry, které zahrnují širší oblast kvantitativních vztahů.

Z axiomů uveďme např.:
A1. Veličiny témuž rovné i navzájem rovné jsou.
A2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky rovny jsou.
A6. A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.
A7. A celek je větší než díl.

Postuláty (tj. požadavky) jsou vlastně fixací předpokladů geometrické konstruovatelnosti objektů. Jsou to vymezení těch geometrických konstrukcí, kterým se posléze začalo říkat „eukleidovské konstrukce“, čímž se rozumělo omezení geometrických prostředků pouze na konstrukce pomocí kružítka a pravítka. Takové vymezení geometrické konstrukce vylučovalo z matematických úvah v eukleidovském pojetí mnohé útvary či řešení, o nichž už jsme slyšeli a kde bylo např. používáno kinematických metod.

P1. Dvěma body lze položit přímku.
(Prvý postulát zaručuje možnost narýsování úsečky.)
P2. Přímku omezenou lze nepřetržitě rovně prodloužit.
(Druhý postulát zdůrazňuje délkovou neomezenost konstrukce zaručené P1, tj. „délkově neomezené pravítko“.)

P3. Z jakéhokoliv středu a jakýmkoliv poloměrem lze narýsovat kružnici.
(Třetí postulát zaručuje konstrukci kružítkem libovolného rozevření.)

P4. Všechny pravé úhly jsou rovné.
(Čtvrtý postulát stejně jako šestý axiom tvoří spojovací článek mezi geometrickým útvarem a jeho kvantitativním ukazatelem (velikostí).)

P5. Když přímka protínající dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní úhly menší dvou pravých, pak ty přímky prodlouženy jsouce do nekonečna se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.
(Poslední pátý postulát zaručuje vlastně konstrukci nejjednoduššího rovinného útvaru trojúhelníka.)

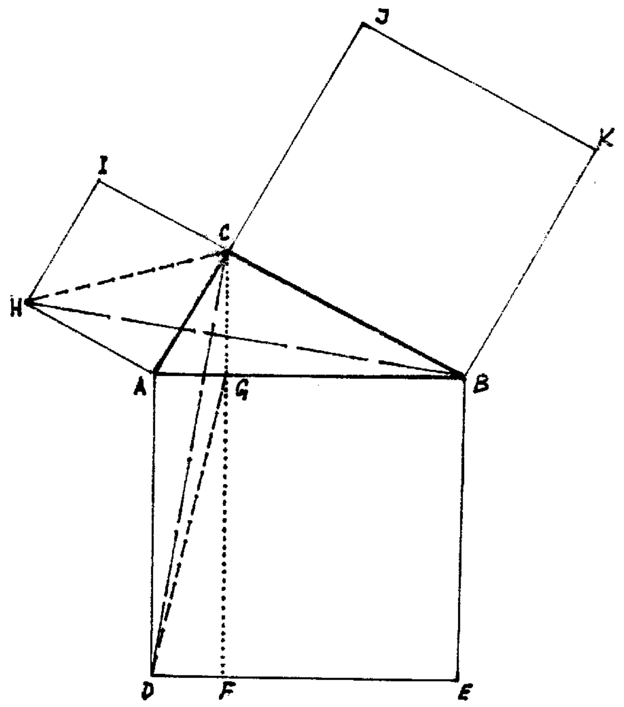
Přitom právě složitost formulace P5 vedla už záhy v antice ke kritice jeho zařazení mezi jednoduchá tvrzení axiomatického systému. Jeho formulace navozuje okamžitě souvislost s vymezením rovnoběžek (D23). Snaha o jeho nahrazení vedla zároveň k jinému vymezení rovnoběžek a zde byl základ dva tisíce let trvajícího úsilí o vybudování „jiné“ teorie rovnoběžek, či o dokázání pátého postulátu z ostatního axiomatického základu. Tyto snahy vedly v 19. století k vytvoření neeukleidovských geometrií a spolu s tím též ke zpřesnění axiomatického systému základů geometrie.

Uspořádání výkladů v každé knize *Základů* se snaží postupovat od jednodušších pojmů (tvrzení, vět) ke složitějším. To vidíme už na řazení definic, ale zejména pak na posloupnosti tvrzení, která jsou dokazována (či vyvozována) z toho, co bylo buď postulováno nebo už z postulovaného prokázáno.

Tento způsob vedení výkladu vědecké teorie, její logické — podle tehdejších kritérií — bezesporné konstrukce, se stal vzorem „vědeckosti“ nejen pro výklad dalších partií matematiky, ale i ostatních partií vědění. „Vyloženo geometricky“ dlouho znamenalo vyloženo způsobem analogickým metodě výkladu Eukleidových *Základů*. Všimneme-li si z tohoto hlediska třeba prvé knihy *Základů*, tak vidíme, že obsahuje

– základní konstrukce trojúhelníka
– věty o shodnosti trojúhelníků

– přeměny rovnoběžníků na trojúhelníky stejného obsahu
– na základě takto zkonstruovaných a prokázaných vztahů je na závěr prvé knihy dokázána platnost Pythagorovy věty



(47) Důkaz Pythagorovy věty

$CAD \equiv HAB$ a zároveň $CAD = GAD$ (stejná základna AD a stejná výška AG). Obdobně $HAB = CHA$ a tedy i $CHA = GAD$. Z čehož vyplývá že i $ACHI = GADF$ (což je vlastně obsah Eukleidovy věty). Totéž platí i mezi $GBEF = JCBK$ a tedy součet čtverců nad odvěsnami ($\square ACHI + \square CBKJ$) je roven čtverci nad přeponou ($\square ABED$) pravoúhlého trojúhelníka ABC.

Celé *Základy* tvoří třináct knih. Knihy 14. a 15., které jsou k Eukleidovým *Základům* připojovány, pocházejí z pozdější doby (z 2. st. př. n. l. a z 6.st. n. l. a jejich autorství se připisuje Hypsiklovi a (?) Damaskiovi). Z přehledu také vidíme, z jakých pramenů *Základy* vznikaly. Eukleidova zásluha pak je především v uspořádání znalostí zde obsažených a možná i v jejich úpravě do jednotného celku a rozhodně podřízení obsahu jednotné metodě výkladu. Podle počtu v knihách obsažených „tvrzení“ („vět“) lze také nabýt představy o rozsahu jednotlivých částí *Základů*.

Eukleidovy *Základy* nejsou encyklopedií staré antické matematiky. Dokonce ani některé vlastní Eukleidovy výsledky do této práce nejsou zařazeny. Jsou však důležitým pokusem o budování výstavby celé matematiky a v tomto směru se nejen udržely až do počátku 19. století jako součást systému výkladu matematiky, ale platily rovněž za vzor axiomaticky deduktivně budované teorie i pro jiné vědní oblasti. Jeden z prvých pokusů o aplikaci této metody lze nalézt např. v Archimedově teorii páky.

Eukleidovy Základy*) Tématický obsah

KNIHA	OBSAH	ROZSAH	PŮVOD
1	Rovinná geometrie	48 vět	Ionské období
2	Elementární geometrická algebra	14 vět	a
3	O kruhu	37 vět	Pythagorejci
4	Mnohoúhelníky opsané či vepsané kružnici	16 vět	6.–5. století př. n. l.
5	Rozšíření veličin o proporce	24 vět	Eudoxos
6	Užití 5. knihy na rovinnou geometrii	33 vět	pol.4. st. př. n. l.
7	Teorie čísel. Dělitelnost, prvočísla	39 vět	Pythagorejci
8	Teorie čísel. Figurální čísla, posloupnosti	27 vět	Pythagorejci
9	Teorie čísel. Učení o sudém a lichém	36 vět	Pythagorejci
10	Kvadratické iracionality	117 vět	Theaitetos 1. pol. 4. st. př. n. l.
11	Elementární stereometrie	39 vět	Iónské obd. Pythagorejci
12	Exhaustivní metoda, počítání objemů (jehlan, kužel, koule)	18 vět	Eudoxos
13	Pravidelné mnohostěny	19 vět	Theaitetos

* Nejstarší dnes známé zlomky textu *Základů* tvoří šest střepů s texty a obrazci z 2. pol. 3. st. př. n. l. (nalezeno v Egyptě r. 1906-8). Obsahují co do smyslu (ne co do textu) 10. a 16. větu z 13. knihy. Z doby před 4. st. n. l. se dochovalo asi 120 řádek textu *Základů*. Ve 4. st. učinil redakci *Základů* Teon z Alexandrie, o jeho verzi se opírala většina vydání Eukleida do 19. st. 1908 F. Peyrard nalezl mezi Napoleonovými vojsky ve Vatikáně ukořistěnými materiály řecký kodex, obsahující Eukleidovy *Základy*, vzniklý mimo Teonovu tradici. Je to tzv. Codex Vat. Graec. 190 dnes opět ve vatikánské knihovně. To byl také hlavní pramen Heibergovy řecko-latinské edice Eukleidových *Základů*, edice, která se stala východiskem pro všechna vydání Eukleidových *Základů* v národních jazycích.

Archimedova aplikace antických infinitesimálních metod

Archimedes ze Syrákús (* asi 287 př. n. l., † 212 př. n. l.)

Archimedes

Basrelief z Capitoline Museum v Římě (neznámá datace)

O životě Archimedově příliš nevíme. Byl synem dvorního astronoma Phidia, krátce studoval v Alexandrii, a pak žil v Syrakúsách na Sicílii. V době druhé punské války, kdy Syrakúsy bojovaly po boku Kartága proti Římu, využil řady svých vynálezů a znalostí mechaniky a optiky k obraně města. Po pádu Syrakús byl při plenění města zabit římským vojákem. (Zde je pramen legendy o jeho posledních slovech: *Nedotýkej se mých kruhů* —- *Noli tangere circulos meos*). Archimedes se snažil o axiomatickou výstavbu teorie páky, je zakladatelem statiky pevných těles a hydrostatiky a zejména přispěl k rozpracování antické infinitesimální metody výpočtu objemů a obsahů geometrických útvarů s oblými tvary, což inspirovalo matematiky dlouhá léta a přispělo k vybudování diferenciálního a integrálního počtu. Archimedova aproximace čísla π, Archimedova spirála, Archimedův šroub, pojem hustoty, pojem těžiště, statický moment, podmínky rovnováhy, vztah síly a práce na jednoduchých strojích jsou jen části dodnes citovaných výsledků jeho díla. Heibergova edice *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii* I–III (1910–1915) je základem překladů do moderních jazyků (angl. 1953, něm. 1963). O jeho životě a díle píše např. I. Schneider, *Archimedes, Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker*, Darmstadt 1979.

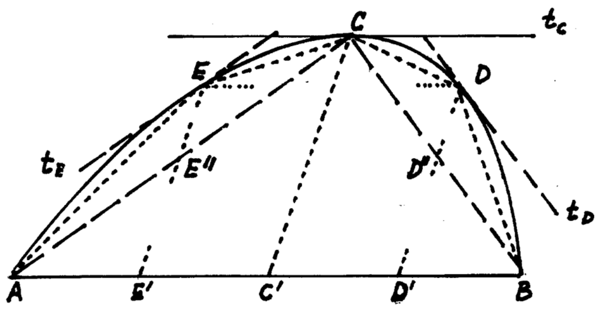
Archimedes začal ve svých pracích využívat zmíněné Eudoxovy exhaustivní metody asi tak sto let po jejím vzniku. Záměrem tohoto syrakuského matematika, mechanika a technika byly výpočty obsahů ploch či objemů těles některých známých útvarů, zejména pak těch, které byly „oblé“ a nebyl znám vztah, který by jejich „velikost“ pomohl přesně srovnat s velikostí „hranatých“ útvarů, jako byly krychle, hranol, jehlan apod. U Archimeda — obdobně jako v 17. století u Newtona a Leibnize — slavil úspěch při řešení této problematiky aritmetický kalkul, kterým se mu podařilo skloubit Eudoxovu exhaustivní metodu a konkrétní vlastnosti počítaných útvarů.

Archimedova metoda tak zahrnovala:

(1) limitní ukončení aproximativního procesu postupného, stále přesnějšího vyčerpávání útvaru, jehož „velikost“ (obsah či objem) byla počítána

(2) geometrickou konstrukci tohoto aproximativního procesu vytvořenou tak, že každý následující krok $(n+1)$ byl opakováním předchozího n-tého kroku, čímž se vytvářel geometrický algoritmus a bylo možné stanovit přesně, co bude platit pro kterékoliv n

(3) zákon posloupnosti aritmetických hodnot odpovídající předchozí geometrické konstrukci; n-tý člen této posloupnosti tak vyjadřoval velikost n-tého kroku v algoritmu geometrické konstrukce



(48) Postup Archimedova výpočtu kvadratury úseče paraboly.

Do úseče paraboly AECDB s tětivou AB a vrcholem úseče C je vepsán trojúhelník ABC. Se vzniklými úsečemi BCD a ACE je provedeno totéž. Vzniknou trojúhelníky BDC a ACE o kterých lze z vlastností paraboly dokázat, že platí:

$$BCD = \tfrac{1}{4}ECC', \ ACE = \tfrac{1}{4}ACC' \text{ a tedy i } ACE+BCD = \tfrac{1}{4}ABC.$$

Jestliže bychom konstruktivně postupovali stejně s úsečemi nad tětivami BD, DC, CE, EA, tak by platilo o součtu obsahů ploch trojúhelníků mad úsečemi BD, DC, CE, EA že je $\frac{1}{4}(ACE+BCD) = (\frac{1}{4})^2 ABC$. *Tedy každý další krok vytváří útvary, jejichž obsah je jednou čtvrtinou útvarů předchozího kroku. Stačí tedy převést vše na součet nekonečné geometrické řady, jejíž prvý člen je ABC a kvocient* $\frac{1}{4}$.

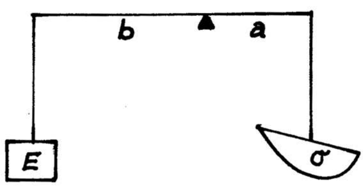
(4) výpočet z početně dané posloupnosti potřebné hodnoty a její zpětnou geometrickou interpretaci. Zde bylo využíváno některých umných početních postupů nahrazujících Archimedovi neznámé vzorce pro součet nekonečné aritmetické či geometrické posloupnosti. Tak si Archimedes vytvořil pro každý konkrétní útvar aritmetický kalkul, se kterým bylo možno provést hledaný výpočet. Tak třeba u „kvadratury úseče paraboly" — tj. u výpočtu obsahu plochy úseče paraboly (obr. 48) — bylo třeba dospět k součtu konvergentní geometrické posloupnosti, vyjadřující posloupnost součtu trojúhelníků vepisovaných podle pevného geometrického výtvarného řádu (konstrukčního postupu) do vytvářených úsečí. Výsledkem je pak vztah: Obsah plochy úseče paraboly $AECDB$ je roven 4/3 obsahu trojúhelníku ABC.

Archimedes ještě dokazuje, že skutečně tato hodnota je limitou a tak je plocha úseče plně „vyčerpána". Tak byl znám Archimedův spis v 16. století a tak působil na rozvoj infinitesimálních úvah před Newtonem a Leibnizem.

Teprve v roce 1906 byl nalezen Archimedův dopis Eratosthenovi „Poselství Eratostenovi o tom, jak zacházet s mechanickými větami", který prozrazuje, že Archimedova heuristika byla úplně jiná a že exhaustivní metodu využíval pak k tomu, aby tušené (odhadnuté, změřené) výsledky přesně matematicky odvodil a dokázal.

Jeho heuristická metoda v tomto případě úzce souvisela s jeho vlastní teorií páky. Umístíme neznámý útvar O a ekvivalent E známé velikosti na páku a uvedeme je do rovnováhy, pak platí:

$$E \cdot b = O \cdot a,$$



(49) „Vážení" úseče paraboly na páce

z čehož lze určit velikost neznámého útvaru. (Nelze zde vyloučit ani experimentální vážení, které dalo dosti aproximativní hodnotu a/b). Archimedes si však neznámý útvar vhodně rozděluje na dílčí útvary a pak je sčítá. Teprve po nalezení výsledku se obrací k jeho matematickému odůvodnění.

Infinitesimální metody staré helénistické matematiky přestože neměly vypracován aritmeticko-algebraický aparát, přestože zde nejsou obecně formulovány pojmy limita, integrál, součet nekonečné řady, přestože zde nejsou ani vymezeny podmínky platnosti získaných výsledků a každá úloha je řešena individuálně, se staly výchozím bodem zkoumání matematiků 16. a 17. století. Leibniz se vyjádřil: *„Prozkoumáme-li práce Archimeda a Apollonia, přestaneme se divit úspěchům dnešních matematiků"*.

Apolloniovy kuželosečky

Apollonios z Perge (* 262 př. n. l., † 190 př. n. l.)

Podle Eutokia vrchol Apolloniovy činnosti spadá do let 246–222 př. n. l. Vystudoval v alexandrijském Museu a proslavil se zejména astronomickými pracemi. Ptolemaios v *Almagestu* uvádí, že Apollonios se zabýval teorií epicyklů a excentrů pro jeho teorii pohybu planet. Je známo že věnoval dvě knihy dnes tzv. Apoloniovým problémům (tj. konstrukcím dotykové kružnice ke třem útvarům, z nichž každý může být bod, přímka nebo kružnice). Jeho hlavní osmidílné dílo *Konika* se zachovalo v řečtině ve čtyřech knihách, v arabštině pak knihy 5. až 7. Osmá kniha se ztratila. V roce 1710 je vydal známý astronom E. Halley, moderní řeckolatinská edice je od J. L. Heiberga *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis*, I., II., Leipzig 1891–1893.

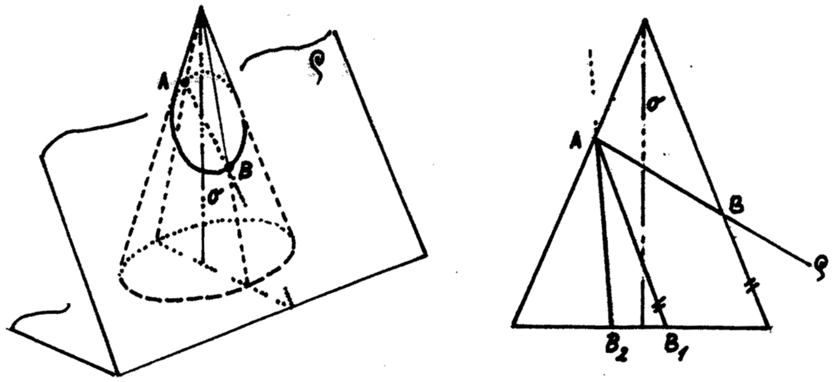
Rovněž třetí hlavní oblast výsledků helénistické matematiky je zajímavá především svou metodou svírající určitý matematický předmět do ucelené teorie. Kuželosečky jako geometrické objekty byly známy už u o dvacet let staršího Archimeda, a také se ví, že i o téměř sto let starší Eukleides napsal o nich traktát, který se nedochoval. Nepochybně i u Hippokrata z Chiu (z poč. 5. stol. př. n. l.) by se dala předpokládat určitá znalost vlastností kuželoseček. Nicméně teprve mladší současník Archimedův, v Alexandrii matematiku studující a poté v Pergamonu, tehdy právě se rozvíjejícím, působící Apollonios vytvořil osm knih traktátu „Kónika" (tj. kuželosečky). Z nich se prvé čtyři knihy dochovaly v pozdějších řeckých přepisech, pátá až sedmá v arabském překladu a osmá se nedochovala vůbec. Tento traktát byl v dalším vývoji matematiky komentován a stal se v dalším vývoji matematiky v 16. a na poč. 17. stol. základem, z něhož vyrůstala analytická metodika matematiky. Apolloniův způsob výkladu kuželoseček zapůsobil vedle toho podnětně i na astronomy přelomu

16. a 17. stol. a u Keplera přispěl ke zpřesňování heliocentrického popisu sluneční soustavy.

Apolloniova *Kónika* přinášejí především klasifikaci řezů na kuželi. Vychází se zde z rovin řezu kolmých k osovému řezu kužele. Na obr. 50 jde o rovinu $[AB, o]$. Pak je-li řezem rovina ϱ procházející úsečkou AB_1 (viz obr. (b)), resp. AB_2, je řezem parabola, resp. hyperbola a v případě AB jde o elipsu. Apollonios zároveň uvádí, že AB je osou kuželosečky a uvažuje pak situaci v rovině řezu ϱ, když je dána hlavní osa AB a $\omega\varrho\vartheta\eta = 2p$ (tj. parametr), čili délka tětivy kuželosečky kolmá na osu a procházející ohniskem).

Z těchto dvou prvků (hlavní osy a parametru) konstruuje křivky. Z konstrukce vyplynou Apolloniovi i názvy těchto křivek. A v 6. knize Apollonios nadto ukazuje, že takto konstruované křivky lze „nasadit“ na kužel, a že jsou tedy shodné s rovinnými řezy kužele, tedy kuželosečkami.

Metoda vytváření těchto křivek v sobě skrývá zárodek metody souřadnic a současně též princip funkčního vztahu.

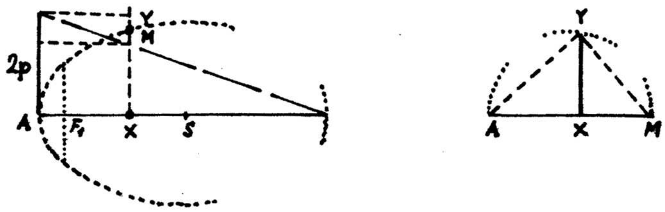


(a) (b)

(50) Apolloniův přístup ke kuželosečkám

(a) situace eliptického řezu *(b) osový řez*

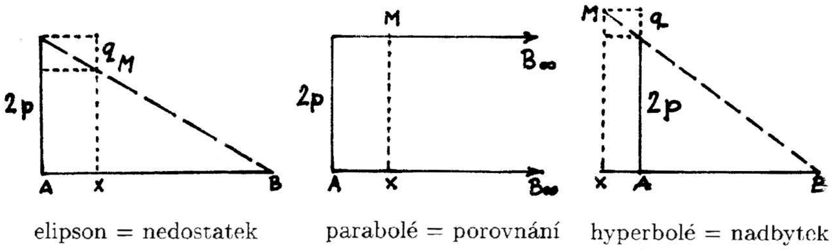
Jaký je postup Apolloniovy konstrukce? Vytvoří si z úsečky AB a parametru $2p$ jako z odvěsen pravoúhlý trojúhelník. Body křivky konstruuje tak, že každému bodu $x \in AB$ chce přiřadit stranu čtverce rovnoplochého s obdélníkem AX, XM. To je vlastně funkční vztah, který každé nezávisle proměnné úsečce AX přiřazuje na ní závislou úsečku y. Přitom je zde funkční vztah vyjádřen jednou z eukleidových vět (čtverec nad výškou (y) v pravoúhlém trojúhelníku je roven obdélníku sestrojenému z obou částí přepony (AX, XM)). Srv. obr. 51.



(51)

Zároveň je vidět, že tyto dvě úsečky AX a y svírají pro kterákoliv AX a y stále týž úhel a každý bod hledané křivky bude určen dvojicí úseček (AX, y). Nutno podotknout, že Apolloniova úvaha je obecnější, takže není vždy třeba, aby úhel byl pravý, jako je tomu v našem výkladu.

Na obrázku je nadto ukázáno, jak se při této konstrukci uplatní celý obdélník $AX \cdot 2p$. Vidíme, že jen v případě paraboly dochází k „porovnávání" ploch bez „nedostatků" či „přebytků", pro což byl řecký termín „parabole" — odtud se také křivce začalo říkat parabola. Obdobně tam, kde využíváno obdélníka bez q, tj. s nedostatkem (= elipson) vznikne elipsa, a u přebytku $+q$ (= hyperbolé) se vytváří hyperbola. Rovnice, které by vyjadřovaly tento stav, jsou uvedeny na obr. 52, a jsou jen vyjádřením příslušné Eukleidovy věty v analytickém výrazu tehdejší matematice ještě nedostupném.



elipson = nedostatek $y^2 = (2p - q) \cdot x$

parabolé = porovnání $y^2 = 2p \cdot x$

hyperbolé = nadbytek $y^2 = (2p + q) \cdot x$

(52)

V dalších částech Apolloniova spisu jsou převážně konstruktivní úlohy objasňující vlastnosti kuželoseček vzhledem k jejich osám, sdruženým průměrům či asymptotám, konstrukce tečen kuželoseček i bez užití bodů dotyku, teorie ohnisek elipsy a hyperboly (ohnisko paraboly vůbec neuvažuje). Přináší zde i prvé věty dnes zařazované do projektivní geometrie a věnované teorii pólů a polár a vytváření kuželoseček ze dvou projektivních svazků přímek.

Čtvrtá kniha se zabývá speciálně vzájemným stykem různých kuželoseček nebo stykem kuželosečky a kružnice.

V následujících knihách narůstá náročnost problematiky. V páté knize se objevuje otázka středů křivosti daného oblouku kuželosečky a vzhledem k hledání všech středů křivosti i otázka evolvent, která nebyla Apolloniovi cizí už proto, že souvisela s jeho teorií epicyklů vytvořenou pro Ptolemaiův geocentrický popis sluneční soustavy. V šesté knize Apollonios ukazuje, jak jím konstruované křivky se shodují s rovinnými řezy kužele. V sedmé knize si všímá některých metrických vztahů mezi útvary vytvářenými osami či sdruženými průměry.

Osmou knihu se snažil rekonstruovat současník Newtonův, známý anglický astronom Halley (1656–1742), který usoudil, že jen rozvíjela myšlenky sedmé knihy.

Popis obsahu celého Apolloniova traktátu jsme uváděli především proto, abychom si uvědomili, jaké bohatství myšlenek se objevilo v „zlaté době řecké matematiky“ a jak jejich znovuobjevení, kritické promýšlení a rozšíření nezbytně muselo ovlivnit rozvoj matematiky v Evropě 16.–17. století. Francouzský matematik Fermat právě při studiu Apollonia rozpoznal v nové situaci závažnost jeho metody popisu kuželoseček a vyabstrahoval z ní — nezávisle na Descartovi — základ souřadnicové metody analytického popisu v geometrii.

Diofantova algebra

Diofantos z Alexandrie (žil kolem r. 250 př.n. ll)

O jeho životě téměř nic nevíme. Z jeho děl se zachovaly původně třináctidílná *Aritmetika* a pojednání *O mnohoúhelníkových číslech*. Z *Aritmetiky* se donedávna znalo jen prvých šest knih.(*Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis* I, II, Leipzig 1893–1895,P. Tannery ed.) Čtyři nalezené v arabských rukopisech označované jako knihy IV až VII byly vydány 1982 (Sesiano,J. *Books IV to VII of Diophantus Arithmetica in the Arabic Translation attributed to Qusta ibn Luqa*). Problematice, která vyplývá z Diofantova díla pro řešení neurčitých rovnic a teorii čísel se věnuje např. I. G. Bašmakova, E. I. Slavutin, *Istorija Diofantova analiza ot Diofanta do Ferma* 1984, resp. T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge 1895, reprint Dover 1964.

Na samotném závěru vývoje helénistické matematiky na konci 3. století n. l. se objevuje Diofantova *Aritmetika*. Lze říci, že teprve tímto dílem jsou fixována a pevně zachycena pravidla pro počítání rovnic, vytvořena prvá algebraická symbolika, a tak nastoupena cesta rozvoje algebry jako teorie řešení rovnic. Řešení rovnic se zde také dostává z oblasti logistiky, kterou se zabývali praktičtí počtáři — vesměs propuštění otroci, mezi matematické teorie. Bylo by však chybou nezmínit, že tato práce vlastně už v mnohém jen kodifikovala pravidla vytvořivší se už v egyptské a mezopotámské matematice, kde však pro obecnější záznam rovnice nebyl ještě vytvořen příslušný aparát a tak se rovnice řešily do značné míry podle naučených pravidel na počítadlech, přičemž se zaznamenávaly jen nezbytné mezivýsledky.

Současně s pravidly operací s rovnicemi vytváří Diofantos i pojem neurčité rovnice, ovšem na rozdíl od dnešního pojetí diofantických rovnic — jakožto součásti teorie čísel — u nichž hledáme všechna celočíselná řešení, Diofantovi stačí nalezení alespoň jednoho racionálního řešení. Je to opět 17. století, které vytváří dnešní koncepci řešení neurčitých rovnic.

V operacích s racionálními čísly Diofantos přináší pojem *leipsis* (odečítané číslo) a s tím i tušení záporného čísla. O *leipsis* říká, že součin dvou *leipsis* dává číslo přičítatelné.

Formuluje dvě základní pravidla pro počítání s rovnicemi:

(1) převádění členů rovnice z jedné strany na druhou s opačným významem (odečítané číslo se mění na přičítané atp.)

(2) vypouštění stejných členů stejné funkce na obou stranách rovnice

Tato dvě pravidla se dostala i do názvu arabského přepracování Diofantovy *Aritmetiky*, které provedl v 9. století v Bagdádu Al-Chvárizmí. Prvé pravidlo nazval arabsky algébr (aldžebr) a druhé valmu kabala. A tak teprve v 9. století dostala celá nauka o řešení rovnic podle této arabské práce název algebra (Pozdější latinský překlad al-Chvárizmího traktátu začínal slovy: Al-Chvárizmí říká … algorismi dicit … a tak se ustáleným pravidlům řešení určitých typů úloh začalo říkat algoritmus.)

Zároveň v Diofantově pojetí ztrácí postupně algebra svá geometrická omezení (dimenzionální homogenita jednotek, které mohly být užívány) a veličiny nabývají číselné podoby.

Podstatná je však především Diofantova algebraická symbolika, která v různých úpravách se udržela až do nové obecnější symboliky, započaté Vietou, později zdokonalené Harriotem a konečně ustálené Descartem na rozhraní 16. a 17. století. Diofantova symbolika vychází ze zkracování slov (říká se také, že jde o tzv. synkopické období vývoje algebry). Zajímavé je, že se zde objevují i symboly pro mocniny až do šestého stupně — což v geometrické algebře bylo nemožné a nemělo to ani smysl — i když ve vlastních výpočtech se užívá opět jen rovnic do třetího stupně.

Neznámá = alogos arithmos ς

(v rovnici symbol sigma nevystupoval,
s koeficientem se neznámá označovala $\xi\xi$ (dvěma ksí).

Mocniny neznámé:

$\bar{\delta}^{\upsilon}$	dynamis = stupeň, čtverec, síla tj. dnešní	x^2
$\bar{\varkappa}^{\upsilon}$	kybos = krychle	x^3
$\overline{\delta\delta}^{\upsilon}$	dynamodynamis	x^4
$\overline{\delta\varkappa}^{\upsilon}$	dynamokybos	x^5
$\overline{\varkappa\varkappa}^{\upsilon}$	kybokybos	x^6

Jestliže vystupovala mocnina neznámé v nějakém počtu, připojoval se za ní ještě ionský symbol dané číslice, takže našemu $3x$ odpovídalo $\overline{\xi\xi}\,\bar{\gamma}$.

Pro záporné mocniny neznámé např. pro $3/x$, se užívalo symbolu $\bar{\gamma}^{\varsigma}$ nebo $\bar{\gamma}^{\xi\xi}$ a termínů arithmostón (x^{-1}), dynamostón (x^{-2}), kybostón (x^{-3}) ... až po kybokybostón (x^{-6}). Absolutní členy rovnice (jednotky) byly označovány $\mathring{\mu}$ (monady) a počtem. Rovnost dvou stran byla označována buď $\iota\sigma o\varsigma$ nebo vzácněji prostě ι. Dále platilo, že všechny členy rovnice se sčítaly, aniž by se to nějak vyznačovalo.

Pouze symbol $\pitchfork$ či $\curlywedge$ měl význam našeho minus a závorka, protože vše, co bylo za tímto symbolem, se odečítalo.

Tak už bylo možné naši rovnici

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

zapsat

$$\overline{\varkappa}^{\upsilon}\,\overline{\alpha}\,\overline{\xi\xi}\,\overline{\eta}\ \pitchfork\ \overline{\delta}^{\upsilon}\,\overline{\varepsilon}\,\mathring{\mu}\,\overline{\alpha}\ \iota\ \overline{\xi\xi}\,\overline{\alpha}$$

Takto sestavená symbolika bezesporu vytvořila předpoklady pro klasifikaci typů algebraických rovnic a tím i pro rozvoj algebry. K tomu však už v řecké matematické tradici nedošlo.

Závěr

Vývoj matematiky v řeckých oblastech probíhal dále až do počátku 6. st. n. l. Postupně s pronikáním křesťanství však byl podlomen rozvoj „pohanských" vědeckých center a přestala se rozvíjet teoretická část matematiky. Dalo by se říci, že zde ani nebylo popudů, které by nutily tyto rozpracované oblasti teoretické matematiky rozvíjet. Tak se objevují už jen ojedinělé výsledky a především komentáře k hlavním traktátům. Díky matematické sbírce Pappa z Alexandrie (žijícího kolem r. 320 n. l.) a komentářům Prokla Diadocha (* 410/411, † 17. 4. 485) se nám dochovalo mnoho historických poznámek, které dovolily antickou matematiku zalidnit.

8. Orientální podněty rozvoje matematiky

Úvod

Rozklad antické civilizace se nevyhnul vědě ani matematice. To neznamená, že by se z bohatého vývoje antické matematiky nic neuchovalo. Postupně se na církevních školách vytvořil kánon poznatků, které se předávaly dalším generacím; v nich se objevovaly části Ptolemaiova *Almagestu*, některé partie z pythagorejských *Mathémat*, prvé knihy Eukleidových *Základů*, něco poznatků Nikomachových, Platonových, Aristotelových a Archimedových. Většina těchto partií byla soustředěna v Boetiově kompendiu, které se snad proto, že jeho autor byl mučedníkem za křesťanskou víru, udrželo jako základní učebnice, na církevních školách a stalo se tak součástí scholastiky (v původním smyslu školské náplně výuky).

Na dalším evropském vývoji bylo nejtragičtější, že už od závěru antického vývoje vlastně nedocházelo k rozvíjení a obohacování myšlenek z antického odkazu ani k vlastním novým vědeckým výbojům. Středověk znamenal dlouhou intelektuální stagnaci, ze které se Evropa jen obtížně probouzela od 11. století.

Na tomto místě se nebudeme zabývat otázkami příčin stagnace evropské matematiky, které bezpochyby tkví ve zcela izolovaném stylu života feudální společnosti, z níž snad jen několik desetiletí „karolínské renesance" v 8. století vytrhlo vzdělanost ze strnulosti.

Rozklad antické vzdělanosti dovršený Justiniánovým rozeháněním aténské Akademie v roce 529 vedl k odchodu mnoha antických učenců do orientálních zemí, kde nacházeli poměrně tolerantní prostředí pro svou odbornou práci a nakonec i zájem o antické výsledky. Tak začaly výsledky antické matematiky pronikat do vědění v Persii, Indii i v zakavkazské střední Asii.

Začátek 7. století znamená zároveň obrovské ideologické, politické a expansní výboje, které od Mohamedova útěku z Mekky (622 — hidžra) ovládly celou Arábii, daly vznik novému monotheistickému náboženství–islámu a vedly k rychlému porobení vel-

Století	Země pod antickou tradicí	Matematici islámských zemí
7. st. př. n. l.		
6. st. př. n. l.		
5. st. př. n. l.		
2. st. př. n. l.		
1. st.		
3. st.		
4. st.		
	Proklos (410–485)	
5. st.	Boetius (480–524)	
6. st.	Simplikios († 549)	
7. st.	Severus Sébokht (622) – Sýrie Širakaci (7. st.) – Arménie	
8. st.		
		al-Chvárizmí (?780–850) al-Habaš (770–870) al-Hadždžadž (8.–9. st.)
9. st.		Ibn Turk (9. st.) bratři Banú Músá (9. st.) al Kindí (†?873) Ibn Qurra al Harraní (830–90) an Najrízí (Anaritius †922) al Battaní (850–892) abú Kámíl al Misrí (?850–929) al Farghaní (9. st.) al Džauharí (9. st.) abu'l Hasan (873/4–935/6) al Farábí (?870–950)
10. st.		abu'l Wafá (940–997/8) Thábit ibn Qurra (908–946) al-Hasan (?965–1039) ibn Sina (Avicena 980–1037) al-Isfahání (10. st.) al-Bírúní (973–1048)
11. st.		an Nasawí (†?1030) al Karadží (al Karchí †?1030) al Džajjaní (11. st.) al Husajn (11. st.) Omar Chajjám (1048–1131) az Zarkalí (Arzachel 1030–1090)
12. st.		Ibn Ezra (1090–1167) ibn Rušd (1125–1198)
13. st.		
14. st.		Ulugh-Bégh (1394–1449)
15. st.		al Káší (†?1429

Středověcí orientální matematici

Indie	Čína	Století
„védy“		7. st. př. n. l.
„šalvasutra“		6. st. př. n. l.
7.–6. st. př. n. l.		
„siddhánty“		5. st. př. n. l.
	„Matematika v 9 knihách“	2. st. př. n. l.
	Čang Cheng (78–139)	1. st.
	Liou Chuej (3. st.)	3. st.
	Sun-c’(3.–4. st.)	
„Súrja siddhánta“		4. st.
(4.–5. st. Arjabhatta I (*476)		
	Cu Čchung-č(5. st.)	5. st.
Varahamihára (505)	Liou Čou (544–610)	6. st.
„Baksálí“ rkp. (6.–7. st.) Bragmagupta (* 598)		
	Li Čchung-feng (605–673)	7. st.
Bhaskara I (6. stol.)		
	„Deset klasiků“ (7. st.)	
	Wang Siao Tchung (7. st.)	
	I–Sing (683–727)	
Gautama Siddhárta =Čchiou-tchan-Si-ta (8. st.; Ind pracující v čínském astronomickém úřadu)		8. st.
		9. st.
Mahavíra (9. st.)		
Šrípati (9. st.)		
Šrídhara (850–950)		
		10. st.
Arjabhata II (10. st.)		
		11. st.
	Šen Kua (1030–1094)	
Bhaskara II (1114–1178)		12. st.
„Siddhánta–Širomani“ 1150		
	Li Jie (1178–1265)	
Čangaděra (13. st.	Jang Chuej (13. st. Čchin Ťiou-Šeo (13. st.)	13. st.
	Ču Š-Ťie (13. st.) Kuo Šou-ting (1231.–1316)	
Nárájana		14. st.
		15. st.
Nílakonta (kolem 1500)		
„Tantra-sangraha“		

kých území jak na východě tak na západě. Roku 637 byla pod panstvím islámských vojsk Sýrie a Irán, 642 už i Egypt a postupně severní pobřeží Afriky až 711 se musulmanská vojska přeplavila do Španělska a v polovině 8. století ovládla téměř celý pyrenejský poloostrov; na východě pak v roce 712 obsadila Chórasám a část Pándžábu. Od poloviny 9. století okupovali do poloviny 11. století Sicílii. Hlavní město Damašek se roku 762 přestěhovalo do Bagdádu. A Bagdád se stal prvým střediskem vzdělanosti velkého islámského chalífátu. Alexandrijské Músejon, které našlo zprvu alespoň personální azyl v Sýrii, pokračovalo ve své tradici v Antiochii, v Harránu a posléze v Bagdádu. Zde na konci 8. století založil Hárún ar-Rašíd velkou knihovnu, a jeho pokračovatel al-Ma'mún vlastně dovršil alexandrijskou tradici založením „Bait al-hikma" (Domu moudrosti) — vědeckého střediska, jehož jedním z prvých vůdčích duchů se stal matematik al-Chvárizmí. Podobné domy pak vznikaly i v dalších centrech této veleříše, která zdaleka nebyla centralistickou državou.

Od samého začátku rozvoje této instituce vzrůstal zájem o překlady antických autorů. Už v 8. století al-Hadžadž překládá Eukleidovy *Základy* a al-Džauhárí je komentuje. Bagdádská matematika se intenzivně rozvíjela skoro dvě století. V té době byly Eukleidovy *Základy* přeloženy několikrát a vedle toho byly přeloženy práce Archimeda, Apollonia, Ptolemaia, Heróna, Diofanta. Další centra pak vyrůstala v Buchaře, Chvárizmu, Ghazně, Isfahánu, Samarkandu, Káhiře, Cordobě, Seville, Toledu aj.

Současně však se v arabské vědě projevují vlivy orientální: indické i čínské — oblastí, s nimiž byly kulturní styky. Středoasijští učenci působili v Číně stejně jako někteří indičtí a tak stará orientální učenost pomáhala arabským vědcům připravovat novou vědeckou syntézu.

Jestliže se evropská matematika začala seznamovat mezi 11. až 15. stoletím s antickou matematikou v arabské tradici, pak se seznamuje už s jejím rozšířením o tvůrčí přepracování arabskými matematiky obohacené dálněvýchodními výsledky.

Několik zvláštností orientálního vývoje matematiky ve srovnání s evropským

Především evropský vývoj v období feudálního rozvoje na rozdíl od vývoje klasického Řecka byl podstatně spoutáván myšlenkovou sterilností, kterou přinášelo spojování křesťanské dogmatiky se státní ideologií. Různost a mnohost řecké filozofie a soupeření různých proudů i ve společenské správě, otevřenost obchodu, trhu, rozvoj řemesel byly vystřídány potlačením různosti filozofií, nastolením křesťanské dogmatiky, přímou feudální podřízeností a poslušností, ekonomickou uzavřeností feudálních hospodářství, poddanstvím s jeho omezováním hybnosti společnosti.

Naproti tomu v zemích Indie a Číny nebyla nikdy vyhraněná společensko-filozofická situace ve společnosti taková jako v Evropě. Feudální držba se v těchto zemích objevuje mnohem dříve než v Evropě (Čína 3. až 2. stol. př. n. l., Indie poč. n. l.). Stát tam není nikde spoután přímou vazbou s nějakým náboženstvím. Naopak právě na panovnických dvorech jsou požadavky na disputace mezi stoupenci různých náboženských směrů (v Číně například v 9. stol. n. l. bylo 200 000 mnichů navráceno občanskému životu státem) a rovněž ekonomická pouta nejsou tak přísná jako v Evropě.

Nelze tedy říci, že by v orientálních zemích byly společenské, politické a filozofické podmínky, které by vedly k podnícení logického myšlení a ke zkoumání teoretické výstavby vědní disciplíny jako tomu bylo v Řecku, ale rovněž tam nebyly zábrany ideologie, která by potlačovala vědecké metody a nutila vědce nevybočovat z mezí daných autoritami.

Matematika se tedy v dálně orientálních zemích mohla dále rozvíjet, ale místo směrem k teorii, tak spíše k rozšiřování a zobecňování výpočetního směru. Místo koncepční architektonické stránky se v ní rozvíjela aritmeticko-algebraická počtářská stránka. Tak se zde dospívá k velmi rozvinutým metodám a postupům, avšak k jejich zobecnění a jednotnému ucelenému výkladu se nedochází.

Předchozí odstavce se týkaly charakteru matematiky Číny a Indie. Arabská matematika na tom byla podstatně jinak. Především se vyvíjela až po (a pod) vlivem řecké matematiky a tedy v Řecku rozpracovaný deduktivní výklad a logické odvozování i v arabské matematice nacházejí své uplatnění a další prohloubení. Na str. 128–129 je také vidět z časového rozložení četnosti nejznámějších matematiků v jednotlivých oblastech Orientu, že v Číně se vývoj soustředil do nejrannějšího období. *Matematika v devíti knihách* vznikala snad ve 2. stol. př. n. l. a tradice tam byla podle některých dochovaných svědectví minimálně o tisíciletí ranější. I když vlastní *Matematika v 9 knihách* byla znovu vytvořena až ve 3. stol. n. l. Liou Chuejem. Čína však byla snad jedinou zemí, ve které byla náplni výuky matematiky na školách věnována systematická pozornost už v 6. stol. n. l. a úředníci ve státních službách se museli podrobovat zkoušce ze svých matematických znalostí. V 7. století zde vzniká dokonce „Astronomický úřad" systematicky vyžadující pracovníky s matematicko-fyzikálními znalostmi. Sbírka *Deset klasiků* (ve smyslu 10 klasických matematických traktátů, z nichž jedním byla např. *Matematika v 9 knihách*) se v 7. století stala učebnicí, kterou musel uchazeč o práci v úřadě zvládnout.

V Indii se prvé zlomky matematických znalostí najdou ve *Védách* — kultovních náboženských knihách shromažďujících „vědomosti". V 7.–5. století př. n. l. vznikly *Šalvasutry* (Pravidla provazce) — spojené s problémy měřičství. Dalšími knihami soustřeďujícími vědomosti byly *Siddhánty* (Učenosti), které vznikaly ve 4.–5. stol. n. l. a některé byly komentovány Varahamihirou. O něco mladším spisem je *Arjábhattija* napsaný v roce 499, který měl široký matematický obsah a i když nezahrnoval všechny tehdy v Indii známé matematické znalosti, byl užíván a ještě po tisíci letech komentován. (I tato skutečnost svědčí o malém pohybu v dalším vývoji matematiky v Indii).

Dílo Brahmaguptovo z roku 628 a *Krátká věda o výpočtech* (Pátíganitasára) od Šrídhary z přelomu 9. a 10. století byly podnětem k dílu Bháskary II Siddhánta — *Širomani* (Koruna vědy) napsanému kolem roku 1150, které shrnuje hlavní výsledky matematiky v té době v Indii známé a snaží se praktické úlohy doplňovat i řešením abstraktních problémů. Mělo dlouhá staletí řadu komentátorů.

V zemích pod islámským vlivem je znalost klasické helénské a helénistické matematiky výchozí bází pro teoretickou koncepci matematiky, ale současná vyšší úroveň aplikací — zejména v astronomii — vedla k prohloubení aritmeticko-algebraické oblasti (na rozdíl od Eukleidem prosazované geometrizace matematiky) a její provázanosti s geometrií. Jestliže jsme mohli vyjmenovat hlavní díla z čínské a indické oblasti, je výčet arabských stěžejních spisů velmi obtížný, protože jak matematiků je příliš mnoho, tak i jejich koncentrace mezi 8. až 11. století; další významná díla pak vznikají ve 13. a 14. století.

Připomeňme si nejprve hlavu bagdádské matematické školy al-Chvárizního s jeho *Knihou o sčítání a odečítání podle indického počtu*, která přináší dekadickou soustavu v indickoarabském ciferném zápisu a operace v ní a zejména jeho *Krátkou knihu o počtu algebry a al-muqábaly* (Al-Kitáb-al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala), kde jedno z pravidel pro úpravu rovnice je nazváno al-džabr a dalo tak název celé nauce o řešení rovnic — algebře. Algebraická problematika dala vzniknout i pracím abú Kámila a a al-Karádžího (*Kitáb al-káfí fi'l-hisáb* — Dostatečná kniha o vědě počtářské) či al-Fachriho z roku 1010, kde už je využita Diofantova *Aritmetika.* Nelze opomenout ani *Algebraický traktát* Omara Chajjáma (1074). Obsáhlá je diskuse o Eukleidově postulátu o rovnoběžkách (an-Najrízí, Thábit ibn Qurra, ibn al-Haithám, Omar Chajjám, at-Túsí). Díky rozvoji islámské astronomie je velká pozornost věnována v astronomických traktátech trigonometrii (al-Chvárizmí, al-Habaš, al-Battání, Abúl-Wafa, al-Bírúní, al-Káší, at-Túsí, Ulugh-Bégh) a v matematických výpočtech čísla π (al-Bírúní, al-Káší: *Traktát o kruhu* 1424) a nesmíme ani opomenout al-Kášího *Klíč aritmetiky* (1427). Již tento výčet ukazuje jak velká pozornost věnovaná v islámských zemích matematice přispěla k podstatnému prohloubení matematické práce směrem ke speciálnějším traktátům než tomu bylo v Indii a Číně.

Výsledky, v nichž orientální matematika předešla evropskou

Na tomto místě se nebudeme věnovat otázce priorit. Spíše ukážeme, co bylo v práci ve výpočtářsko-aritmetické tradici orientální matematiky možné, a kde naopak tato tradice znemožnila další plodný rozvoj matematiky.

Příklad aproximace čísla π

Jak víme, nejpřesnější antické přiblížení pro π podal Archimedes:

$$3,1408 = 223/71 = 3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7 = 22/7 = 3,1428,$$

přičemž použil výpočtu obvodu do kruhu vepsaného mnohoúhelníka. Metoda v té době už měla i svou teoretickou oporu v antické teorii limit tak, jak byla vypracována v Eudoxově exhaustivní metodě. V orientální matematice je vlastně Archimedova myšlenka dále rozpracována zjemňováním dělení kruhu — tj. zvětšováním počtu stran vepisovaného pravidelného mnohoúhelníka. Takže pak vidíme následující přiblížení čísla π:

3. st.	Čína	Liou Chuej	96-úhelník	3,14
			3072-úhelník	3,14159
5. st.	Čína	Cu Čchung-č	$3,1415926 < \pi <$	3,1415927
			355/113 odpovídající	3,1415929
5. st.	Indie	Arjabhatta I	$62832/20000 =$	3,1416
		(obdobné přiblížení užívají pak i Varáhamira, Arjabhatta II, Bhaskara II a j.)		
1501/2	Indie	Nílakantha	$104348/33215 =$	3,1415926539
1424	Islámské země	al- Káší	$3 \cdot 2^{28}$-úhelník	získává π s přesností na 17 míst

Uveďme jen, že Cu Čchung-čova aproximace π zlomkem 355/113 byla znovuobjevena v Evropě až Valentinem Otho v 16. století a al-Kášího aproximace čekala až na Ludolpha van Ceulena, aby ji dále zpřesnil na 20 míst (v publikaci z roku 1596) a aby zanechal v pozůstalosti výpočet až do 35. místa.

Důležitá ovšem není přesnost, k níž se orientální učenci propracovali, i když ji prakticky vůbec nepotřebovali k žádným (ani astronomickým) výpočtům; šlo jim o zjemňování výpočetních metod. Závažné je, že se nikdy, ani v situaci, kdy už mohli znát Archimedovo dílo, kdy už znali Eukleidovy *Základy* nikde nepokusili překročit mez výpočtů a zobecnit postup a formulovat princip exhaustivní metody jako problém limitního přechodu mezi posloupností obvodů vepisovaných mnohoúhelníků a obvodem kruhu.

Příklad algebraických problémů

Podobnou situaci vidíme i v řešení algebraických problémů. Ve 13. století v Číně jsou zobecňovány metody vedoucí vhodně k řešení kvadratických a kubických rovnic na rovnice libovolných vyšších stupňů (Hornerovo schéma), i když v praktických úlohách se k takovým matematickým problémům nedocházelo. V řecké tradici by takovéto rozšiřování matematického postupu nebylo možné, protože by to odporovalo geometrickému chápání algebraických výrazů a tak v Číně vlastně dochází k obohacování koncepce matematiky, kde algebraické problémy jsou chápány zcela nezávisle na své geometrické interpretaci. Obdobně se zde setkáváme s řešením soustav rovnic o velkém počtu neznámých. I zde šlo o rozšiřování postupů, které byly známy z běžné praxe, na větší počet neznámých než bylo kdy v praxi potřebné.

Další výsledky, kterými orientální matematika předběhla evropský vývoj nebo které evropská matematika později s úspěchem dále rozšířila:

– Především se objevují v Orientu jiné *symboly pro čísla* (číslice) než pro písmo.

– *Desetinná poziční numerace* v Číně známá ve 2. století př. n. l., v Indii před 7. stol. n. l. odkud ji přebírá al-Chvárizmí kolem roku 830 a do Evropy se dostává sice v roce 846, ale použití se rozšiřuje až po 12. století.

– *Desetinné zlomky* v Číně užívány ve 3. stol. n. l., u al-Kášího v 15. stol. a v Evropě publikuje svou práci *De Thiende* Simon Stevin v roce 1585.

–*Záporná čísla*, která dělala evropským matematikům starosti dlouho do novověku, se objevují v čínské *Matematice v devíti knihách* (nejpozději ve 2. st. př. n. l.) včetně pravidel odčítání, sčítání (i od „ničeho“) a vzájemného násobení. Je to kvalitativně vyšší chápání než Diofantovo *leipsis* u něhož je stanoveno, že menšitel násobený menšitelem dává sčítanec.

– *Iracionální čísla*. V antice vypracoval Eudoxus teorii proporcí, která rozšiřovala aritmetické operace na geometrické veličiny a tím převáděl celou aritmetiku, v níž se objevily obtíže s druhými odmocninami z celých čísel, nevyjádřitelnými pythagorejskými racionálními poměry na geometrický základ.

Mezi islámskými matematiky se mluví o iracionálních číslech už v 9.-10. století; pro jejich aproximaci je užíván Eukleidův algoritmus postupného odčítání. Omar Chajjám v 2. pol. 11. století ukázal na ekvivalenci pojetí iracionálního čísla konstruovaného Eukleidovým algoritmem a eudoxovskou proporcí. U Al-Kášího v *Klíči aritmetiky* už nenajdeme rozdíl mezi geometricky chápanými proporcemi a iracionálními druhými odmocninami z celých čísel.

K vytvoření teorie reálných čísel pak dochází po pokusech Méraye, Bolzana a dalších až u Dedekinda, Cantora a Weierstrasse ve 2. pol. 19. století.

– *Náznaky teorie matic a determinantů* se objevují na začátku našeho letopočtu v Číně, ale teprve 1683 se objevuje u Japonce Seki Kowy prvá teorie determinantů, která v evropských poměrech nalézá prvé náznaky u G. W. Leibnize, ale konečné rozpracování až u Cayleye a Sylvestra v 2. pol. 19. století.

– *Hornerovo schéma* se objevuje v Číně ve 12. století a ve 13. století je zobecněno pro libovolné přirozené n.

– aditivní pravidlo pro výpočet binomických koeficientů:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

je formulováno u al-Kášího v *Klíči aritmetiky* (1427); ale trojúhelník binomických čísel znali Indové již ve 2. stol. př. n. l. Objevuje se u al-Karádžího kolem konce 1. tisíciletí, v Evropě pak u Petra Apiana 1527 a Michala Stifela 1544. Obecně známým jako Pascalův trojúhelník se stává až roku 1665 z Pascalova pojednání *Traité du triangle arithmétique*.

– už u Brahmagupty v 7. století se objevuje převádění kvadratické *rovnice na kanonický* tvar a tím i jediné pravidlo řešení.

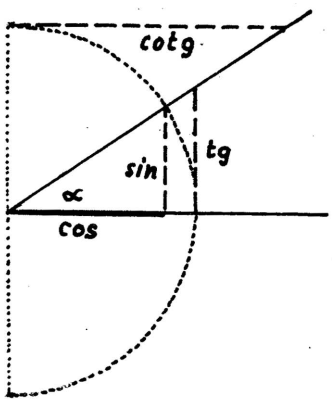
– Prohloubilo se studium teorie neurčitých rovnic v souvislosti s astronomickými výpočty kalendáře jak v Číně, tak v Indii; mezi nimi u Brahmagupty (7. století) i celočíselné řešení Pellovy rovnice, která byla známá už Archimedovi $ax^2 + b = y^2$ (kde $a \neq b^2,\ b$ celé); řešení znovuobjevené v Evropě P. Fermatem až roku 1657 (úplné řešení podává až 1769 Lagrange!).

– Vedle již zmíněné *aproximace čísla* π a znalosti *vztahů Pythagorovy věty* o stranách v pravoúhlém trojúhelníku už v 7. až 6. století př. n. l., se v geometrii zabývali:

–*konstrukcemi s omezenými prostředky.* Abú-l-Wafa na konci 10. století používá kružidla s pouhým konstantním rozevřením, což se systematicky objevuje v Evropě až u Mascheroniho (18. století), když zčásti byly úlohy s těmito konstrukčními metodami řešeny už u Vinciho, Tartaglii a Cardana v 15. a v 16. st.

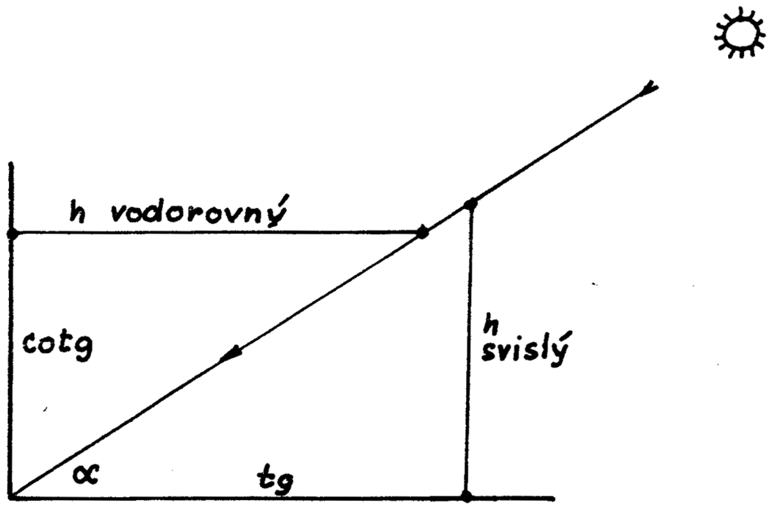
– Problematika *rovnoběžek a důkazu postulátu o rovnoběžkách* byla přenesena do Orientu už v 7. století Simplikiem a mezi islámskými matematiky byla nejen populární (at Túsí, Omar Chajjám), ale byla nastoupena cesta k jejímu řešení, která bezesporu ovlivnila přímo Wallise, Saccheriho a jejich prostřednictvím i další evropský vývoj.

– Značného rozkvětu doznala v Orientě *trigonometrie včetně tabulek.*



(53) Trigonometrické funkce

Jestliže v Mezopotámii byla rozpracována trigonometrie tětiv, která pak byla obsažena a zdokonalena v Ptolemaiově *Almagestu*, v Indii je v 5. století zaveden pojem sinu jako poloviční tětivy dvojnásobného úhlu. Tato změna umožnila záhy i další trigonometrické funkce. Sinus, kosinus a sinus versus ($= r - cos$) jsou zavedeny v 5. a 6. století v indických „siddhántách" a v „arjabhattija" (termín „sinus" byl poprvé použit kolem r. 1145 Robertem z Chesteru při překladu arabského termínu „džaib". Termín cosinus vznikl z Peurbachova a Regiomontova sinus complementi u Angličana Guntera v roce 1620. V těchto sbírkách se také objevují prvé tabulky sinů a sinusversů.



(54) „Stíny u al-Habaše“

h ... *délka gnomónu (=jednotka)*

tg ... *délka stínu* $= tg\,\alpha$

α ... *astronomická výška slunce*

Funkce tangens a cotangens zavedli už současníci al-Chvárizmího v Bagdádu v 9. století při vztahu odvěsen pravoúhlého trojúhelníka. Termíny původně znamenaly „stín“ a „obrácený stín“ v latině „umbra recta“ a „umbra versa“, teprve 1583 Thomas Fink zavedl termín tangens a již zmíněný Gunter v roce 1620 použil i termínu kotangens.

Al-Habaš v 9. století sestavil tabulky „stínů“ a „obrácených stínů“ s růstem „výšky“ Slunce α po $1°$. Zároveň zavedl i funkci kosekans a tabeloval ji.

Termín sekans zavedl až Fink. Už al-Habaš znal vztahy mezi trigonometrickými funkcemi, ale explicitně je uvedl na konci 9. století al-Battání.

$$\mathrm{cotg} = \cos/\sin, \qquad \mathrm{tg} = \sin/\cos, \qquad \sin = 1/\mathrm{cosec}$$

$$\cos = 1/\sec, \qquad \sec = 1 + \mathrm{tg}^2, \qquad \mathrm{cosec} = \sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2}$$

$$\sin = \mathrm{tg}/\sec$$

Ve stejné době se objevuje důkaz sinové věty a al-Bírúní znovu po Eukleidovi vyslovuje i kosinovou větu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníku. Abu'l Hasan na konci 10. století odvodil vztah

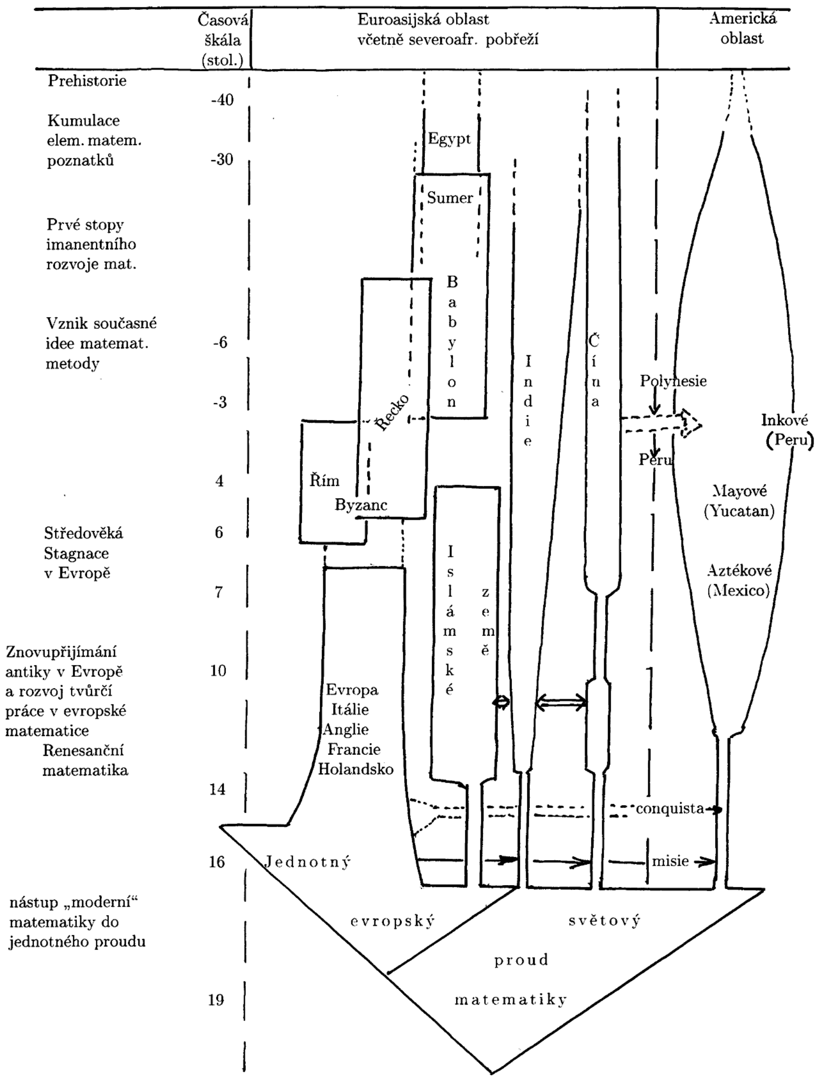
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

Tabulky trigonometrických funkcí byly součástí tzv. „zídž“ — tj. sbírky tabulek pro astronomy a geografy, kterých se dochovalo ze středověké islámské vědy na sto exemplářů. Je zajímavé i to, že už u al-Bírúního v pol. 11. století nacházíme tabulky s přesností do kvint. Podobné jsou i tabulky Ulugh-Béghovy z počátku 15. století.

Závěr

Přehled výsledků orientální matematiky měl jen velmi kuse přiblížit skutečnost, že orientální matematika nebyla jen pasivní transmisí antických znalostí do probouzející se západní Evropy. Čínská a indická matematika spolu s matematikou musulmanských zemí z vlastních popudů i ze studia antiky rozvinuly aktivní vědeckou práci, která jiným způsobem než v antické epoše rozšiřovala škálu matematických výsledků a tak vlastní aktivitou přispěla k tomu, že evropská matematika, která se od 11. do 15. století seznamovala s výsledky starověku, mohla začínat poněkud dále jak výsledky, tak i koncepcí než kde skončila hlavní díla matematiků antiky.

Bylo jen ke škodě evropské matematiky, že nemohla rychleji čerpat ze zdrojů orientální matematikou připravených, a že nakonec z nich nečerpala nikdy úplně. Tak řada důležitých výsledků orientálních vědců, které mohly pozitivně působit na další rozvoj matematiky, zůstala mimo pozornost rozvíjející se evropské matematiky s výjimkou příliš pozdě k této problematice přistupujících historiků vědy.



Vývoj matematiky
v geografickém schématu

Proklos (410–485)
Boetius (480–524)
Simplikios († 549)

Konec antiky

Beda Venerabilis (673–735)
Alkuin (735–804)
Gerbert (930/45–1003)
Adelhard z Bathu (1116?–1142)
Robert z Chesteru (12. st.)
Gerardo z Cremony (1114–1187)
Herman z Dalmácie (kolem 1140)
Domingo Gonzales (12. st.)
Joanes Sevilský († ? 1153)
Plato z Tivoli (12. st.)
Robert Gosseteste (? 1168–1253)
Leonardo Pisánský (? 1170–1250)
Jordanus Nemorarius (12.–13. st.)
Sacrobosco(1190?–1256)
Campanus z Novary (1210–1296)
Roger Bacon (1214–1292)
Witelo (? 1225–1280)
Alfons X. (1226–1284)
Raymondus Lullus (1232–1315)
Gersonides (1288–1344)
Thomas Bradwarinus (? 1290–1349)
W. Heytesbury (1313–1372)
Nicolas Oresme (? 1323–1382)
Křišťan z Prachatic (1360–1438)
Richard Swineshead (1. pol. 14. st.)
Jan Šindel (? 1375–po 1453)
Bruneleschi (1377–1446)
Joannes z Gmundenu (1380–1442)
Georgios z Trapezuntu (1393–1486)
Paolo di Dono (1396–1476)
Dominicus de Clavasio (14. st.)
Nicolas Cusanus (1401–1464)
Leon Battista Alberti (1404–1472)
Martin z Lenčice (1405–1463)
Johann Widmann (kolem 1500)
P. della Francesca (1423–1492)
Peurbach (1423–1461)
Regiomontanus (1436–1476)
Jean Pélerin (? 1445–1523)
Luca Paccioli (1445–1517)
Leonardo da Vinci (1452–1519)
Nicolas Chuquet (1445?–1488)
Scipione del Ferro (1465–1515)
Albrecht Dürer (1471–1528)
Mikuláš Koperník (1473–1543)
Michael Stifel (1487–1567)
Christoff Rudolf z Javora (? 1500–1540)
Tartaglia (1500–1557)
Cardano (1501–1576)
Ferrari (1522–1565)
Bombelli (1526–1573)
Fr. Vieta (1540–1603)
Tycho Brahe (1546–1601)
Simon Stevin(1548–1620)
del Monte (1545–1607)
Napier (1550–1617)
Jost Bürgi (1552–1632)
Harriot (1560–1602)
van Rooman (1561–1615)

Začátek »vědecké revoluce«

Galilei (1564–1642)
Kepler (1571–1630)
St. Vincentio (1584–1667)
Cavalieri (1598–1647)
Desargues (1591–1661)
Descartes (1596–1650)
Fermat (1601–1665)
Roberval (1602–1675)
Torricelli (1608–1648)
Pascal (1623–1662)
Huygens (1629–1695)
I. Barrow (1630–1677)
J. Gregory (1638–1675)
I. Newton (1642–1727)
G. W. Leibniz (1646–1716)
Jacob Bernoulli (1655–1705)
l'Hospital (1661–1704)
Joannes Bernoulli (1667–1748)
Saccheri (1667–1733)
Goldbach (1696–1764)
L. Euler (1707–1783)
Lambert (1728–1777)

Evropští matematici
od antiky do vědecké revoluce

Literatura

[1] A. P. Juškevič: *Dějiny matematiky ve středověku.* Praha, Academia 1977. I. Přinášejí obsáhlý detailní výklad tohoto období vývoje matematiky paralelně v Číně, Indii, islámských zemích a v Evropě.

Další literatura:

[2] A. I. Volodarskij: *Očerki istorii srednevekoj indijskoj matematiky.* Moskva 1977.

[3] E. I. Berezkina: *Matematika drevnego Kitaja.* Moskva, Nauka 1960.

[4] H. Wussing: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.* Berlin 1979.

[5] G. P. Matvijevskaja, B. A. Rozenfel'd: *Matematiki i astronomy musul'manskogo srednevekovija i ich trudy.* (VIII-XVII vv.) I–III, Moskva 1983.

[7] Mikami Z.: *The Development of Mathematics in China and Japan.* Leipzig 1913 (přetisk New York 1962).

[8] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics I + II.* Lahore 1935, 1938.

Obsah